

GABRIEL COSTA MARTINEZ GARICOITS

**ANÁLISE ENTRE FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ E
SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA CARTEIRA DE
COMMODITIES**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do diploma de Engenharia de Petróleo.**

SANTOS

2020

GABRIEL COSTA MARTINEZ GARICOITS

**ANÁLISE ENTRE FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ E
SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA CARTEIRA DE
COMMODITIES**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do diploma de Engenharia de Petróleo.**

**Área de concentração: Dep. de
Engenharia de Minas e Petróleo**

Orientador: Rafael dos Santos Goria

SANTOS

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

**GARICOITS, G. C. M. ANÁLISE ENTRE FRONTEIRA EFICIENTE
DE MARKOWITZ E SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA
CARTEIRA DE COMMODITIES / G. C. M. GARICOITS -- São
Paulo, 2020. 50 p. Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de
Minas e de Petróleo. 1.Teoria Moderna do Portfólio 2.Simulação
de Monte Carlo 3.Programação Quadrática 4.Portfólio Eficiente
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t**

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Márcia, por sempre me apoiar e incentivar independentemente das minhas decisões pessoais e profissionais.

Ao professor Rafael dos Santos Goria, pela sua paciência e orientação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos demais professores, pelos ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional.

RESUMO

No escopo financeiro da análise de dados, Markowitz (1952) desenvolveu um modelo de seleção de portfólios eficientes que ficou conhecido como Teoria Moderna do Portfólio. Sendo a teoria que o fez ser premiado com o Nobel de Economia em 1990, sua ideia principal é a definição de um modelo que seleciona ativos para compor uma carteira de investimentos que minimize os riscos envolvidos. Para isso, o modelo leva em consideração as correlações entre esses ativos. Seguindo a linha da TMP, o objetivo deste trabalho é comparar dois métodos para seleção de um portfólio de commodities que minimize os riscos envolvidos. Os métodos serão programação quadrática e simulação de Monte Carlo. A comparação dos métodos será feita utilizando três indicadores: indicador Sharpe, indicador de Shannon-Wiener e um gráfico de desempenho dos portfólios durante um momento de crise de mercado. Para atingir esse objetivo, foi desenvolvido um algoritmo em Python que permitiu realizar testes independentemente do número de ativos que eram dados como input. Os resultados obtidos mostraram que a simulação de Monte Carlo é ineficiente quando o número de ativos disponíveis para a simulação aumenta. A minimização por programação quadrática se mostrou superior em todos os testes e pode ser utilizada para qualquer número de ativos.

Palavras-chave: Otimização, Análise de dados, Minimização de Risco, Monte Carlo, Teoria moderna do portfólio, Índice Sharpe.

ABSTRACT

In the financial scope of data analysis, Markowitz (1952) developed a efficient portfolio selection model that became known as Modern Portfolio Theory (MPT). As the theory that won him the Nobel Prize in Economics in 1990, his main idea is to define a model that selects assets to compose an investment portfolio that minimizes the risks involved. For this, the model takes into account the correlations between these assets. Following the line of TMP, the objective of this work is to compare two methods for selecting a portfolio of commodities that minimize the risks involved. The methods will be quadratic programming and Monte Carlo simulation. The methods will be compared using three indicators: Sharpe indicator, Shannon-Wiener indicator and a portfolio performance graph during a time of market crisis. To achieve this goal, an algorithm in Python was developed that allowed to carry out tests regardless of the number of assets that were given as input. The results obtained showed that the Monte Carlo simulation is inefficient when the number of assets available for the simulation increases. Minimization by quadratic programming proved to be superior in all tests and can be used for any number of assets.

Keywords: Optimization, Data Analysis, Risk Minimization, Monte Carlo Simulation, Modern Portfolio Theory, Sharpe ratio.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Simulações de Monte Carlo	23
Figura 2 - Fronteira Eficiente e SMC	24
Figura 3 - Fronteira Eficiente para BBAS3, PETR4, PRIO3, VALE3 e USD/BRL.....	26
Figura 4 - Metodologia	29
Figura 5 – Fronteira Eficiente para os 9 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1).....	34
Figura 6 – Retorno acumulado para os portfólios selecionados com os 9 ativos mais correlacionados: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1)	35
Figura 7 - Fronteira Eficiente para os 4 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2).....	36
Figura 8 – Retorno acumulado para os 4 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2).....	37
Figura 9 - Fronteira Eficiente para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1).....	38
Figura 10 - Retorno acumulado para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1).....	39
Figura 11 - Fronteira Eficiente para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)	40
Figura 12 - Retorno acumulado para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)	41
Figura 13 - Fronteira Eficiente para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)	42
Figura 14 – Retorno acumulado para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Correlações de Pearson entre os retornos diários dos ativos Brent Oil, Ibovespa, PETR4 e PRIO3 no Período de 02/01/2019 a 11/09/2020	17
Tabela 2 - Retorno e Volatilidade dos ativos BBAS3, PETR4, PRIO3, VALE3 e USD_BRL	25
Tabela 3 - Matriz de Covariância.....	25
Tabela 4 – Portfólios Eficientes para Máximo Sharpe e Mínimo Risco	26
Tabela 5 – Alocações dos ativos no portfólio de menor risco	27
Tabela 6 - Contratos analisados.....	30
Tabela 7 - Correlações de Pearson entre os contratos analisados	30
Tabela 8 - Soma das correlações.....	31
Tabela 9 – Portfólios eficientes e indicadores para os 9 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1).....	34
Tabela 10 - Retorno acumulado para os portfólios selecionados com os 4 ativos mais correlacionados: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2)	36
Tabela 11 - Portfólios Eficientes e indicadores para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1).....	38
Tabela 12 - Portfólios eficientes e indicadores para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)	40
Tabela 13 - Portfólios eficientes e indicadores para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)	42
Tabela 14 – Indicadores de Sharpe obtidos nos estudos de caso desenvolvidos	45
Tabela 15 - Indicadores de Shannon-Wiener obtidos nos estudos de caso desenvolvidos	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Teoria Moderna do Portfólio	13
2.2	Estudos envolvendo a Teoria Moderna do Portfólio.....	16
2.3	Coeficiente de Correlação de Pearson.....	16
2.4	Indicador Sharpe	18
2.5	Indicador de Shannon-Wiener	20
3	MÉTODOS UTILIZADOS PARA A SELEÇÃO DOS PORTFÓLIOS	22
3.1	Método de Minimização Utilizando Programação Sequencial de Mínimos Quadrados	22
3.2	Método das Simulações de Monte Carlo na Teoria Moderna do Portfólio	
3.2	22	
3.3	Teste dos métodos e algoritmo	24
4	METODOLOGIA.....	28
4.1	Estudo de caso 1.....	31
4.2	Estudo de caso 2.....	31
4.3	Estudo de caso 3.....	32
5	RESULTADOS	33
5.1	Estudo de caso 1: ativos com correlações altas.....	33
5.1.1	Grupo 1.1: correlações altas e alto número de ativos.....	33
5.1.2	Grupo 1.2: correlações altas e baixo número de ativos.....	36
5.2	Estudo de caso 2.....	37
5.2.1	Grupo 2.1: correlações baixas e alto número de ativos	37
5.2.2	Grupo 2.2: correlações baixas e baixo número de ativos	40
5.3	Estudo de caso 3: total de ativos disponíveis	41

6	DISCUSSÃO	45
7	CONCLUSÕES	48
	REFERÊNCIAS.....	51

1 INTRODUÇÃO

Clive Humby, um matemático e arquiteto da Tesco Clubcard, declarou em 2006 a frase *“Data is the new oil.”*. Ele elaborou dizendo que, como o óleo, dados são valiosos, mas se não forem refinados eles não poderão realmente ser utilizados (FIRICAN, 2019).

Segundo Whang (2012), a análise de dados se tornou um problema extremamente importante e desafiador em disciplinas como engenharia, ciências da computação, medicina, finanças, biologia e etc. Conforme quantidades cada vez maiores de dados se tornam disponíveis para serem analisados, mais importante se tornam as técnicas, métodos de análise e o tratamento destes dados.

No escopo financeiro da análise de dados, Markowitz (1952) desenvolveu um modelo de seleção de portfólios eficientes que ficou conhecido como Teoria Moderna do Portfólio (TMP). Sendo a teoria que o fez ser premiado com o Nobel de Economia em 1990, sua ideia principal é a definição de um modelo que seleciona ativos para compor uma carteira de investimentos que minimize os riscos envolvidos. Para isso, o modelo leva em consideração as correlações entre esses ativos.

Desde o seu desenvolvimento, a TMP foi utilizada e aceita em escopos que diferem da especulação financeira. Segundo deLlano-Paz *et al.* (2017), é um modelo amplamente aceito em planejamento energético, por exemplo. Araujo (2019) segue as mesmas abordagens de deLlano-Paz *et al.* (2017) para otimizar e analisar os riscos da matriz energética brasileira.

Seguindo a linha da TMP, o objetivo deste trabalho é comparar dois métodos para seleção de um portfólio de commodities que minimize os riscos envolvidos. Os métodos serão programação quadrática e simulação de Monte Carlo. A comparação dos métodos será feita utilizando três indicadores: indicador Sharpe, indicador de Shannon-Wiener e um gráfico de desempenho dos portfólios durante um momento de crise de mercado.

Para atingir o objetivo será desenvolvido um algoritmo em Python, que permitirá realizar testes independentemente do número de ativos que são dados como input. Por se tratar de uma abordagem numérica, os dados que são necessários para fazer uma

análise eficiente devem ser confiáveis e possuir um período histórico relevante. Portanto, utilizaremos os dados de séries históricas de retornos diários de ativos que são facilmente encontrados na internet: *commodities* listadas tanto na bolsa brasileira como em bolsas estrangeiras.

Almeja-se que o código desenvolvido para a seleção de portfólios seja configurado para um abastecimento de dados de forma simples, a fim de se tornar uma ferramenta acessível a futuros estudos envolvendo a TMP, destacando a importância de se ter dados confiáveis para realizar o estudo. Para que o algoritmo seja acessível a todos, houve a escolha da linguagem de programação *Python 3.8*, que é *open-source* (código-aberto).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Teoria Moderna do Portfólio

A Teoria Moderna do Portfólio (TMP) foi desenvolvida pelo economista norte-americano Harry Markowitz em seu artigo “*Portfolio Selection*” (MARKOWITZ, 1952), tese que o fez ganhar o Prêmio Nobel de Economia em 1990.

A sabedoria popular de não alocar todo o seu patrimônio em apenas um ativo tem embasamento científico: a TMP é um modelo matemático que otimiza a alocação dos ativos de um portfólio de investimentos para obter um portfólio que tenha seus riscos minimizados.

A TMP foi proposta sobre a hipótese de que o investidor é avesso ao risco, preferindo o portfólio com o menor risco para um dado retorno esperado. Portanto, os investidores só tomariam investimentos de risco elevado caso esperassem um retorno maior. As principais hipóteses levadas em consideração por Markowitz (1952) foram:

1. O risco pode ser reduzido pela diversificação do portfólio utilizando ativos descorrelacionados;
2. Para o mesmo retorno esperado, o investidor escolhe o portfólio com menor risco.

As equações (1) descreve matematicamente o retorno esperado do portfólio em notação matricial, que é encontrado pela multiplicação da matriz de retornos esperados de cada ativo pela matriz que contém seus respectivos pesos na carteira. São utilizados os retornos diários de cada ativo para a realização dos cálculos. Sendo que o retorno diário do ativo é calculado pela variação percentual do seu preço de fechamento de mercado do dia anterior em relação ao preço no fechamento de mercado do dia atual. Neste trabalho, utilizamos a base de dados de preços do site *investing.com*.

$$r_p = r^T w \quad (1)$$

Onde:

r_p é o retorno esperado do portfólio;

r^T é a transposta do vetor de retornos esperados de cada ativo do portfólio;

w é o vetor de pesos dos ativos do portfólio.

A equação (2) descreve a variância dos retornos de um portfólio. O risco é encontrado calculando a raiz quadrada da variância (desvio-padrão). O risco do portfólio é também chamado de volatilidade, ele representa o padrão de variação dos retornos diários. Com um risco de 2%, é esperado que o portfólio varie de -2% a 2% em dias normais. É *importante* notar que se simplesmente calculássemos o desvio-padrão de um portfólio apenas multiplicando os pesos pelos retornos de cada ativo e calculando o desvio-padrão simples, não encontrariamos o desvio correto pois o cálculo não levaria em consideração a covariância (3) entre os ativos (MARKOWITZ, 1952). As equações foram representadas na forma matricial pois é a representação adequada de como os cálculos foram executados no código e foram adaptadas de Board, Sutcliffe e Ziembra (2008).

$$\sigma_p = \sqrt{w^T C w} \quad (2)$$

Onde:

σ_p é o risco do portfólio;

w^T é a transposta do vetor dos pesos de cada ativo do portfólio;

C é a matriz de covariância entre os retornos dos ativos do portfólio;

w é o vetor de pesos de cada ativo do portfólio.

A equação 3 é a covariância entre os retornos de dois ativos. Ela é utilizada para o cálculo do risco do portfólio (equação 2). A covariância é o grau de interdependência numérica entre variáveis, mede como o retorno dos ativos variam em conjunto. É possível utilizar a covariância para compreender a direção da relação entre as variáveis. Covariância negativa indica que tem comportamento oposto, e positiva que tem comportamento semelhante. Se não estiverem relacionados, ela tenderá a zero (ELTON et al., 2004).

$$C_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{1}^n (r_x - \bar{r}_x)(r_y - \bar{r}_y) \quad (3)$$

Onde:

C é a matriz $n \times n$ de covariância dos retornos dos ativos do portfólio;
 r_x e r_y representam os retornos de dois ativos.

O modelo desenvolvido por Markowitz é representado pela função 1. A ideia é minimizar o risco do portfólio dado um retorno esperado (restrição 1). Também temos a restrição 2 que garante que a soma dos pesos dos ativos da carteira será sempre 1 (100%). A restrição 3 garante que o modelo não irá calcular pesos negativos para os ativos da carteira, que é uma situação possível por investidores, conhecida pela expressão “vendido” em determinado ativo, onde o investidor lucra com a queda dos preços.

Função objetivo:	$\min \sigma_p = \sqrt{w^T C w}$	Função 1
Sujeita a:	$x^T r = r_p$	Restrição 1
	$x^T e = 1$	Restrição 2
	$x \geq 0$	Restrição 3

Onde:

x é a matriz coluna das proporções de cada ativo do portfólio;
 C é a matriz $n \times n$ de covariância dos retornos dos ativos do portfólio;
 r é a matriz coluna do retorno esperado de cada ativo;
 r_p é um dado retorno esperado do portfólio;
 $x^T e$ representa a soma dos elementos de x^T ;
 0 é a matriz coluna de zeros;

2.2 Estudos envolvendo a Teoria Moderna do Portfólio

Não restrinuida apenas ao escopo especulativo dos investimentos financeiros, a TMP é comumente utilizada em diversos tipos de problemas que requerem minimização de riscos. Em Araujo (2019) a teoria de Markowitz foi utilizada para o problema de otimização da matriz energética brasileira. Utilizando a mesma abordagem verificada em estudos como Dellano-Paz et. al, 2014 e Dellano-Paz et. al, 2017, a mesma Função 1 pode ser utilizada para este escopo. Alterando o retorno esperado para custo esperado dos portfólios energéticos, Araujo (2019) obtém a fronteira eficiente de Markowitz inversa, de forma que a curva inferior da fronteira representa os portfólios energéticos eficientes. Dessa forma, obteve os portfólios eficientes para a matriz energética com base nos custos para a resolução de um problema que está fora do escopo especulativo. Araujo (2019) também incluiu na análise do modelo da TMP indicadores de diversificação. Neste trabalho, iremos verificar se é possível utilizar o indicador de Shannon-Wiener utilizado por Araujo para comparar dois modelos de seleção de portfólios.

2.3 Coeficiente de Correlação de Pearson

O coeficiente de correlação de Pearson entre dois ativos é uma medida estatística que mede o grau de dependência linear entre as taxas de retorno desses ativos. De acordo com Markowitz, o coeficiente de correlação varia de -1, onde os retornos dos ativos se movem em direções opostas, até +1, onde os retornos se movem na mesma direção. Quando a correlação é zero os ativos se movem aleatoriamente, sem nenhuma relação entre si (ALMONACID, 2010).

Abaixo encontramos a equação para o coeficiente de correlação de Pearson para dois ativos:

$$p_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \quad (4)$$

Onde:

C_{xy} é a covariância entre os ativos x e y;

σ_x^2 é a variância dos retornos do ativo x;

σ_y^2 é a variância dos retornos do ativo y.

Segundo Filho e Júnior (2009), há autores que interpretam diferentemente a magnitude dos coeficientes. Entretanto, para este trabalho, podemos utilizar a classificação de $p = 0,10$ até $0,30$ (fraco); $p = 0,40$ até $0,60$ (moderado); $p = 0,70$ até $1,00$ (forte). É importante notar que essa classificação também vale para os sinais negativos, onde os ativos são considerados descorrelacionados. Se dois ativos possuem uma correlação de 1 para os seus retornos esperados, isso significa que eles são perfeitamente correlacionados. Se um ganhar 3%, o outro ganha 3%. Se um cair 6%, o outro também cairá 6%. A correlação negativa perfeita (-1) indica que os ganhos de um ativo x são proporcionais às perdas do ativo y (ROSS, 2020).

É comum que empresas da bolsa de valores pertencentes a um mesmo setor, por exemplo o de energia, possuam correlações positivas fortes: as ações da Petrobras (PETR4) e da PetroRio (PRIO3), por exemplo, apresentam correlações fortes entre seus retornos diários. Quando analisadas junto aos retornos diários históricos de preços das commodities de petróleo, como o *Brent Oil*, também apresentam correlações positivas altas, pois o lucro destas empresas está muito correlacionado ao preço do óleo. O Índice BOVESPA, por exemplo, é o principal indicador de desempenho das ações negociadas no Brasil e reúna as empresas mais importantes do mercado de capitais. Empresas grandes como a Petrobras tem um peso significativo no índice, portanto também são propensas a apresentar altas correlações com o retorno do índice. Seguindo nessa linha, é muito falado no mundo das finanças que o investidor deve dolarizar parte do seu portfólio, devido ao dólar ser descorrelacionado aos ativos da BOVESPA. Para constatar as afirmações acima, podemos observar na tabela 1 as correlações calculadas entre os retornos dos ativos que foram comentados nos exemplos. O período analisado foi de 02/01/2019 até 11/09/2020, e podemos verificar como os ativos ligados ao preço do petróleo possuem correlações positivas altas entre si.

Tabela 1 - Correlações de Pearson entre os retornos diários dos ativos Brent Oil, Ibovespa, PETR4 e PRIO3 no Período de 02/01/2019 a 11/09/2020

Brent Oil	Ibovespa	PETR4	PRIO3	USD/BRL
-----------	----------	-------	-------	---------

Brent Oil	1,0000	0,3290	0,5230	0,4619	-0,1625
Ibovespa	0,3290	1,0000	0,8612	0,6734	-0,4378
PETR4	0,5230	0,8612	1,0000	0,6971	-0,3629
PRIO3	0,4619	0,6734	0,6971	1,0000	-0,2539
USD/BRL	-0,1625	-0,4378	-0,3629	-0,2539	1,0000

Fonte: Autor (2020).

Para Markowitz, o risco de uma carteira pode ser reduzido por meio da diversificação. Mas não basta apenas escolher vários ativos diferentes e colocá-los no mesmo portfólio, sendo importante que os ativos sejam inversamente correlacionados. Entender as correlações entre os ativos antes de escolher quais entrarão no modelo é um ponto crucial da TMP.

2.4 Indicador Sharpe

O Indicador Sharpe (equação 5), conhecido internacionalmente como *Sharpe ratio*, foi desenvolvido por William Sharpe em 1966, tem sido uma das mais referenciadas medidas de retorno/risco utilizada em finanças (LIOUDIS, 2019). O indicador quantifica o quanto há de retorno adicional para o risco extra que o investidor aceita ao investir em um ativo de maior risco. Simplificadamente, a relação indica o excesso de retorno de um portfólio em relação ao seu risco, portanto os portfólios selecionados pela TMP que apresentam o maior indicador Sharpe são considerados melhores. Desta forma pode indicar qual dos métodos estudados selecionou portfólios mais eficientes em relação ao risco.

$$s_r = \frac{(r_p - r_{alr})}{\sigma_p} \quad (5)$$

Onde:

r_p é o retorno esperado do portfólio;

r_{alr} é o retorno do ativo livre de risco¹;

σ_p é o risco do portfólio.

É possível incluir o indicador Sharpe no algoritmo de otimização, podemos reescrevê-la como mostra a função 2:

Função objetivo:	$\min s_r = - \frac{(r^T x - r_{alr})}{\sqrt{x^T C x}}$	Função 2
Sujeita a:	$x^T e = 1$	Restrição 1
	$x \geq 0$	Restrição 2

Onde:

x é a matriz coluna das proporções de cada ativo do portfólio;

C é a matriz $n \times n$ de covariância dos retornos dos ativos do portfólio;

r é a matriz coluna do retorno esperado de cada ativo;

$x^T e$ representa a soma dos elementos de x^T ;

0 é a matriz coluna de zeros;

A Restrição 1 garante que a soma dos pesos dos ativos selecionados será sempre igual à 100%; A Restrição 3 proíbe alocações negativas.

O sinal negativo na Função 2 indica a forma como foi estruturada na programação. Como queremos encontrar o maior Sharpe ratio dos portfólios existentes, a fórmula positiva precisaria ser maximizada. Como o algoritmo utilizado é específico para otimizar equações, minimizar a função com o sinal oposto torna possível encontrar o portfólio que apresenta o maior índice Sharpe da fronteira eficiente.

¹ O ativo livre de risco no Brasil é a taxa Selic, definida pelo Comitê de Política Monetária (Copom) e divulgado pelo Banco Central do Brasil (BCB). A taxa Selic utilizada neste trabalho é a mesma definida pelo Copom na data de 17/09/2020 e representa 2% a.a. O histórico das taxas Selic é encontrado no site do BCB: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>.

2.5 Indicador de Shannon-Wiener

Araujo (2019) utiliza o indicador de Shannon-Wiener para analisar a evolução da diversificação dos portfólios de matriz energética selecionados pela TMP em seu estudo. Neste trabalho, iremos calcular o índice de Shannon para os portfólios obtidos por cada método e verificar se este indicador consegue, de forma semelhante a Araujo (2019), representar a diversificação das carteiras de commodities.

O índice de Shannon (equação 6) é um dos índices da diversidade usados para medir a diversidade em dados categóricos, normalmente sendo utilizado em biologia, para a análise de diversidade de espécies de animais. Resumidamente, trata as espécies como símbolos e os tamanhos da respectiva população como uma probabilidade.

$$H = - \sum_{i=1}^S p_i \ln (p_i) \quad (6)$$

Onde:

$H_{max} = \ln S$ é o valor máximo do índice de Shannon e ocorre quando todas as espécies estão presentes e ocorrem em igual número;

n_i é o número de indivíduos em cada espécie;

S é o número de espécies;

N é o número total de indivíduos;

p_i é a abundância relativa de cada espécie, calculada pela proporção dos indivíduos de uma espécie pelo número total de indivíduos: (n_i/N) .

Como as commodities negociadas em bolsa não são divididas em espécies, iremos calcular o índice como se cada ativo fosse uma espécie diferente. Desta forma, p_i se torna a própria porcentagem que cada ativo representa no portfólio eficiente.

Além disso, por se tratar de um somatório, o valor do índice tende a crescer conforme o número de ativos que compõem o portfólio cresce. Desta forma, podemos normalizar o índice dividindo o valor da equação 6 encontrado pelo valor máximo

possível para o portfólio em questão (H_{max}), encontrando um valor de 0% a 100%. Nos casos onde um dos ativos utilizados recebe alocação nula, o algoritmo ignora o ativo em questão, pois é considerada uma espécie que não existe no grupo analisado.

Desta forma, chegamos na equação 7:

$$H = \frac{-\sum_{i=1}^s w_i \ln (w_i)}{\ln S} \quad (7)$$

Onde:

w_i é o peso de cada ativo no portfólio eficiente e $w_i > 0$;

S é o número de espécies.

3 MÉTODOS UTILIZADOS PARA A SELEÇÃO DOS PORTFÓLIOS

3.1 Método de Minimização Utilizando Programação Sequencial de Mínimos Quadrados

Pela Função 1 se tratar de um problema de programação não-linear e temos certas restrições, utilizaremos um método de otimização baseado em gradiente não linearmente restrita: programação sequencial de mínimos quadrados. A biblioteca *SciPy* do *Python* fornece o algoritmo *Sequential Least Squares Programming* (SLSQP), método utilizado para minimizar a Função 1.

O otimizador SLSQP é um algoritmo de programação de mínimos quadrados sequencial que usa o método Han–Powell quasi–Newton. O otimizador usa uma versão ligeiramente modificada do solucionador de mínimos quadrados não linear NNLS de Lawson e Hanson (KRAFT, 1988).

No algoritmo, esta função receberá um range pré-determinado de retornos esperados e as restrições da função 1. Desta forma, para um dado retorno o método retornará o menor risco possível. Ao plotar esses pontos, é possível criar a fronteira eficiente de Markowitz.

3.2 Método das Simulações de Monte Carlo na Teoria Moderna do Portfólio

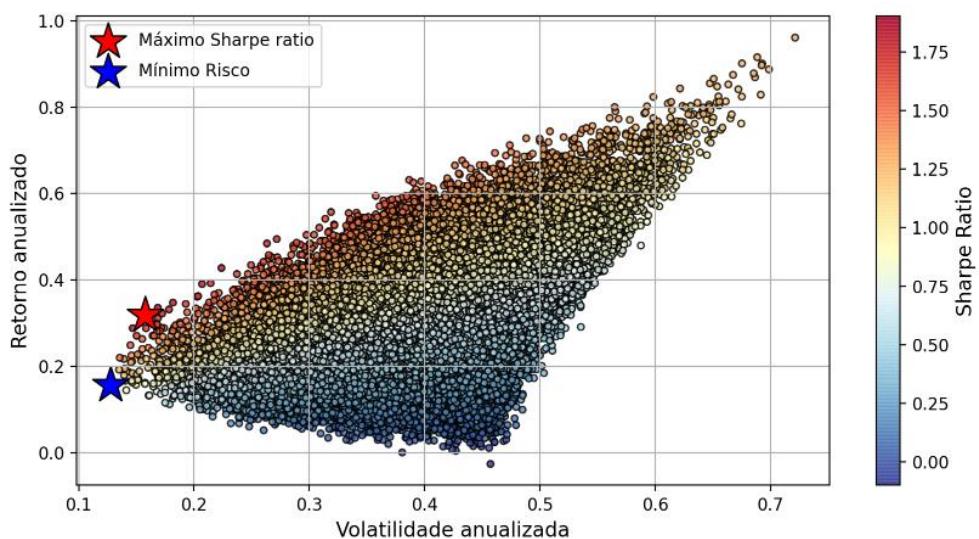
A Simulação de Monde Carlo (SMC) envolve o uso de números aleatórios e probabilidades para analisar e resolver problemas. É um método estatístico que se baseia em *inputs* massivos de amostragens aleatórias para se obter um resultado numérico. A cada iteração, o resultado é armazenado e, ao final de todas as repetições, é possível transformar os *outputs* gerados em uma distribuição de frequência que possibilita calcular estatísticas (JÚNIOR; TABOSA; COSTA, 2011).

Na TMP, não é diferente: podemos fornecer *inputs* aleatórios dos pesos dos ativos de uma carteira e obter um *output* de retornos, riscos e indicadores que queremos analisar.

Neste estudo utilizaremos a biblioteca *numpy* do *Python* que propicia um *seed* de números que se repetem a cada nova rodada de simulações. Chamados de *pseudo-random numbers*, são utilizados quando você deseja que sua simulação “aleatória” possa ser repetida para efeitos de análise.

Ao analisarmos as equações (1) e (2), notamos que é possível calcular o retorno e o risco do portfólio caso entreguemos como *input* o vetor de pesos de cada ativo. Dessa forma, o indicador Sharpe (5) pode ser calculado a partir dos resultados de (1) e (2). E dentre todos os portfólios gerados “pseudo-aleatoriamente”, podemos verificar quais apresentaram o maior indicador Sharpe e o menor risco. A figura 1 representa um teste da SMC para os mesmos ativos e período utilizados para a figura 1, foram geradas 80.000 simulações com um tempo de simulação de 44,51 segundos.

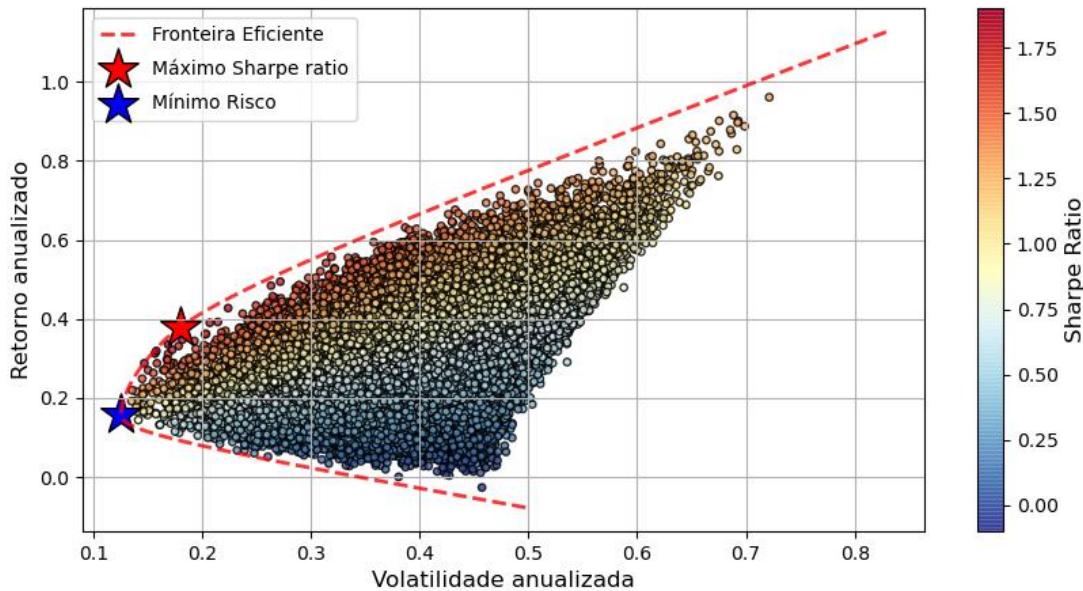
Figura 1 - Simulações de Monte Carlo



Fonte: Autor (2020).

Nota-se visivelmente uma fronteira-limite para os portfólios gerados. O indicador Sharpe está indicado por um mapa de calor onde os maiores valores são indicados pela cor vermelha. Podemos avançar e plotar no mesmo gráfico tanto a Fronteira Eficiente quanto a SMC, como representa a figura 2.

Figura 2 - Fronteira Eficiente e SMC



Fonte: Autor (2020).

Todos os pontos da SMC na figura 2 representam um portfólio diferente e todos permaneceram dentro da fronteira eficiente de Markowitz. Este comportamento, entretanto, ocorre somente quando temos poucos ativos para selecionar. Mais para frente iremos analisar o comportamento da Fronteira *versus* SMC quando aplicarmos o modelo para a carteira de *commodities* com vários ativos.

3.3 Teste dos métodos e algoritmo

Para efeitos de teste do modelo, vamos selecionar portfólios utilizando o método da programação quadrática e as simulações de Monte Carlo, os dados utilizados para o teste foram os retornos diários as ações do Banco do Brasil (BBAS3), Petrobras (PETR4), PetroRio (PRIO3), Vale (VALE3) e dólar americano (USD/BRL) durante o período de 02/01/2019 a 11/09/2020. Todos os dados de histórico de retornos diários utilizados neste trabalho foram obtidos do site <http://br.investing.com>. A tabela 2 contém a média dos retornos e a volatilidade de cada ação no período, a tabela 3 contém a matriz de covariância entre os retornos históricos dos ativos da tabela 2.

Tabela 2 - Retorno e Volatilidade dos ativos BBAS3, PETR4, PRIO3, VALE3 e USD_BRL

Ativos	Retorno Esperado Anualizado ² (%)	Volatilidade Anualizada (%)
BBAS3	-7,71	49,74
PETR4	9,23	52,86
PRIO3	112,67	82,89
VALE3	23,44	49,53
USD_BRL	20,82	17,05

Fonte: Autor (2020).

Tabela 3 - Matriz de Covariância

	BBAS3	PETR4	PRIO3	USD_BRL	VALE3
BBAS3	0,000982	0,000740	0,000921	-0,000155	0,000530
PETR4	0,000740	0,001109	0,001212	-0,000128	0,000671
PRIO3	0,000921	0,001212	0,002726	-0,000141	0,000791
USD_BRL	-0,000155	-0,000128	-0,000141	0,000115	-0,000063
VALE3	0,000530	0,000671	0,000791	-0,000063	0,000973

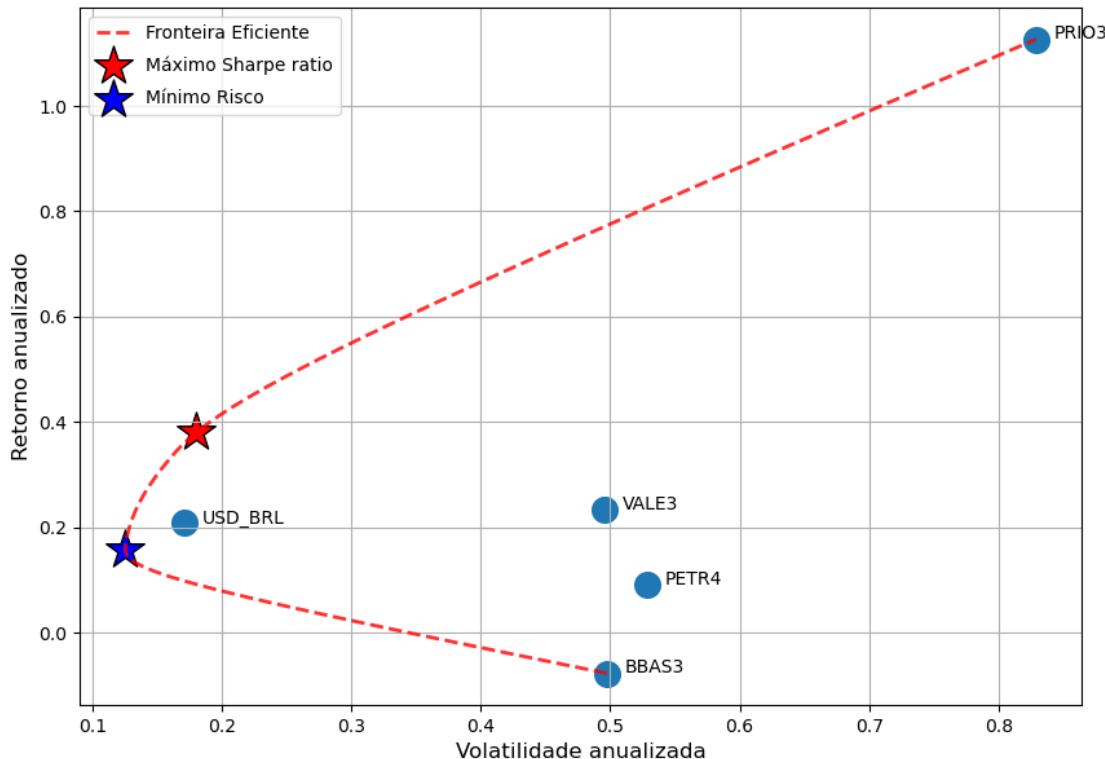
Fonte: Autor (2020).

Ao fornecer um range de *inputs* de retorno esperado (r_p) para a Restrição 1 da Função 1, o output do modelo é a matriz de pontos de retornos esperados dos portfólios gerados *versus* volatilidade (risco) dos portfólios. Ao plotar este output, obtemos a fronteira eficiente de Markowitz, como mostra a figura 3.

E a tabela 4 compara os pesos do portfólio de menor risco e máximo Sharpe.

² É padrão em finanças utilizar os dados de retornos e volatilidade anualizados. Isso significa que a média dos retornos diários foi multiplicada pelo ano comercial, equivalente a 252 dias. Já para anualizar a volatilidade, ela deve ser multiplicada por $\sqrt{252}$, já que representa o desvio-padrão dos retornos no período estudado (raiz quadrada da variância).

Figura 3 - Fronteira Eficiente para BBAS3, PETR4, PRIO3, VALE3 e USD/BRL



Fonte: Autor (2020).

Tabela 4 – Portfólios Eficientes para Máximo Sharpe e Mínimo Risco

Portfólio	s_r	Pesos					
		BBAS3	PETR4	PRIO3	USD/BRL	VALE3	
Portfólio de Máximo Sharpe ratio	2,0047	0,00%	0,00%	18,69%	81,31%	0,00%	
Portfólio de Mínimo Risco	1,1132	15,71%	4,31%	0,00%	79,95%	0,03%	

Fonte: Autor (2020).

Embora ambos os indicadores sejam maiores que 1 (indicando que o retorno adicional supera o risco), nota-se que o algoritmo montou o portfólio de máximo indicador Sharpe com apenas dois ativos, sendo um (PRIO3) o que apresenta maior risco e maior retorno e o outro (dólar) o que apresenta menor risco (verificar o retorno x risco dos ativos na figura 3). Todos os outros ativos não foram considerados pelo modelo para compor o portfólio, provavelmente porque possuem altas correlações entre seus retornos, dado que são do mesmo setor. Este aspecto da TMP de Markowitz pode

representar um problema de diversificação quando as opções do investidor são ativos com correlações moderadas e altas, ou não há uma ampla gama de ativos para serem selecionados.

O ponto de mínimo risco é encontrado ao minimizar a Função 1 removendo a Restrição 1. Desta forma, o algoritmo encontra apenas um portfólio que apresenta o menor risco possível. O portfólio de menor retorno possível consiste apenas do ativo que apresentou o menor retorno no período (BBAS3) e o portfólio de maior retorno consiste apenas da ação que apresentou o maior retorno médio no período (PRIO3), essa peculiaridade da Fronteira Eficiente é constatada por Sharpe (1963). Em seu trabalho (SHARPE, 1963) ele diz que:

O portfólio da ponta da fronteira é determinado. É composto inteiramente do ativo com o maior retorno esperado. Salvo casos onde dois ou mais ativos tem o mesmo (maior) retorno esperado, onde o portfólio se dará por uma combinação de tais ativos que apresenta o menor risco.

Como mostra a figura 3, podemos fazer uma analogia com a constatação de Sharpe para o ponto de menor retorno. Entretanto, para efeitos de seleção de portfólio, os pontos abaixo do nível de menor risco normalmente são ignorados, pois não representam portfólios eficientes. O ponto de mínimo risco apresentou um portfólio mais diversificado de forma a minimizar o risco, os pesos para essa carteira são mostrados na tabela 5.

Tabela 5 – Alocações dos ativos no portfólio de menor risco

	BBAS3	PETR4	PRIO3	USD_BRL	VALE3
Pesos (%)	15,71	4,31	0,00	79,95	0,03

Fonte: Autor (2020).

4 METODOLOGIA

Serão realizados três estudos de caso dos principais contratos futuros de commodities negociados nas principais bolsas. Utilizando os retornos diários³, obtidos com os dados de preços dos contratos de futuro de commodities da tabela 6 desde o início de 2019, a fronteira eficiente da programação quadrática e as simulações de Monte Carlo podem ser construídas com o auxílio de uma linguagem de programação. Python foi a linguagem de programação escolhida por ser código-aberto e por ser a linguagem mais utilizada no tratamento de dados atualmente.

Os três estudos de caso diferem pelo número de ativos utilizados e também pela correlação geral de seus retornos, onde em um dos estudos estarão as commodities com as maiores correlações gerais e em outro as commodities com as menores correlações gerais. O objetivo é analisar os resultados da TMP ao construir a fronteira eficiente utilizando tanto a programação quadrática como as simulações de Monte Carlo.

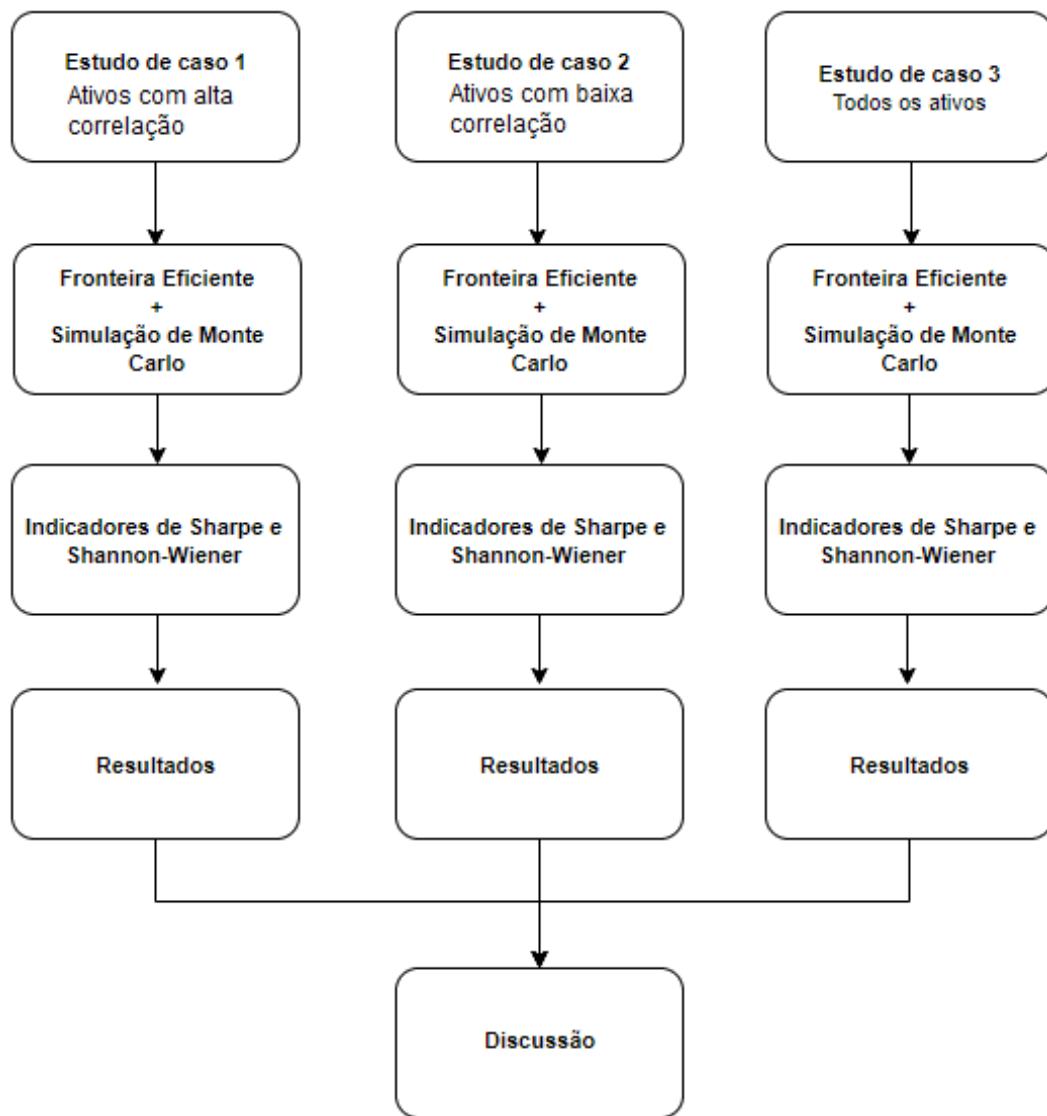
Os ativos que entrarão em cada estudo serão definidos com base na matriz de correlações. As linhas serão somadas e desta forma obtém-se a correlação geral de cada ativo, onde a menor soma representa o ativo mais inversamente correlacionado da lista e a maior soma representa o ativo mais correlacionado da lista. Como a TMP leva em consideração as correlações entre os ativos para selecionar um portfólio eficiente, dando preferência para ativos com correlações inversas, é esperado que os ativos que apresentem as menores somas gerais irão compor os melhores portfólios em respeito aos indicadores de Sharpe. Mas a ideia é verificar como os dois métodos de seleção lidam com essas diferenças.

Utilizaremos os indicadores para analisar se a programação quadrática calcula portfólios mais eficientes em relação às simulações. Além disso, será desenvolvido um gráfico de desempenho que apresenta o retorno acumulado de cada portfólio obtido, para verificar com a curva se comporta em momentos de estresse, como a

³ Os retornos diários foram obtidos do site br.investing.com.

crise do Corona vírus que afetou as principais bolsas mundiais em março de 2020. A figura 4 representa um esquema resumido dos processos de análise desenvolvidos neste trabalho.

Figura 4 - Metodologia



Fonte: Autor (2020).

A tabela 6 abaixo contém a lista de todos os ativos que foram selecionados para compor este estudo. A tabela 7 representa as correlações de Pearson dos retornos diários dos contratos analisados no período de 02/01/2019 a 25/09/2020.

Tabela 6 - Contratos analisados

Produto	Código de negociação	Tipo de contrato	Bolsa
Açúcar NY nº11	SB	Futuro	NYBOT
Boi Gordo	BGI	Futuro	BM&F
Café Arábica 4 5	ICF	Futuro	BM&F
Café Contrato C	KC	Futuro	NYBOT
Cobre	HG	Futuro	COMEX
Dólar Comercial USD BRL	DOL	Futuro	BM&F
Etanol Hidratado	ETH	Futuro	BM&F
Gás Natural	NG	Futuro	NY Mercantile
Gasolina Reformulada RBOB	GPR	Futuro	NY Mercantile
Milho NY	ZC	Futuro	CBOT
Óleo de Aquecimento	NYF	Futuro	NY Mercantile
Óleo de Soja NY	ZL	Futuro	CBOT
Ouro	ZG	Futuro	COMEX
Petróleo Brent	B	Futuro	NY Mercantile
Petróleo WTI	T	Futuro	NY Mercantile
Platina	PL	Futuro	NY Mercantile
Prata	ZI	Futuro	COMEX
Soja NY	ZS	Futuro	CBOT

Fonte: Autor (2020).

Tabela 7 - Correlações de Pearson entre os contratos analisados

	B	BGI	DOL	ETH	GPR	HG	ICF	KC	NG	NYF	PL	SB	T	ZC	ZG	ZI	ZL	ZS
B	1,00	0,05	-0,24	-0,02	0,56	0,33	0,13	0,14	0,15	0,83	0,18	0,33	0,46	0,17	0,09	0,16	0,32	0,11
BGI	0,05	1,00	-0,06	-0,02	0,04	0,07	0,11	0,09	0,00	0,08	0,11	0,11	0,02	0,09	0,09	0,10	0,16	0,13
DOL	-0,24	-0,06	1,00	-0,03	-0,16	-0,23	-0,23	-0,24	-0,08	-0,31	-0,22	-0,20	-0,09	-0,11	-0,02	-0,12	-0,23	-0,20
ETH	-0,02	-0,02	-0,03	1,00	0,00	0,03	-0,10	-0,12	0,00	0,04	0,02	0,11	0,00	0,03	0,04	0,01	0,02	0,04
GPR	0,56	0,04	-0,16	0,00	1,00	0,33	0,07	0,12	0,16	0,55	0,19	0,21	0,31	0,16	0,09	0,12	0,21	0,06
HG	0,33	0,07	-0,23	0,03	0,33	1,00	0,05	0,08	0,16	0,33	0,27	0,08	0,15	0,08	0,14	0,20	0,24	0,18
ICF	0,13	0,11	-0,23	-0,10	0,07	0,05	1,00	0,76	0,09	0,14	0,00	0,07	0,08	0,15	0,00	0,01	0,07	0,15
KC	0,14	0,09	-0,24	-0,12	0,12	0,08	0,76	1,00	0,12	0,17	0,08	0,13	0,09	0,18	0,07	0,11	0,15	0,20
NG	0,15	0,00	-0,08	0,00	0,16	0,16	0,09	0,12	1,00	0,21	0,05	0,02	-0,05	0,08	0,02	0,04	0,12	0,05
NYF	0,83	0,08	-0,31	0,04	0,55	0,33	0,14	0,17	0,21	1,00	0,23	0,35	0,40	0,18	0,06	0,14	0,40	0,18
PL	0,18	0,11	-0,22	0,02	0,19	0,27	0,00	0,08	0,05	0,23	1,00	0,13	0,06	0,03	0,46	0,53	0,25	0,12
SB	0,33	0,11	-0,20	0,11	0,21	0,08	0,07	0,13	0,02	0,35	0,13	1,00	0,19	0,21	0,04	0,11	0,24	0,20
T	0,46	0,02	-0,09	0,00	0,31	0,15	0,08	0,09	-0,05	0,40	0,06	0,19	1,00	0,15	0,03	0,02	0,15	0,08
ZC	0,17	0,09	-0,11	0,03	0,16	0,08	0,15	0,18	0,08	0,18	0,03	0,21	0,15	1,00	0,04	0,06	0,34	0,49
ZG	0,09	0,09	-0,02	0,04	0,09	0,14	0,00	0,07	0,02	0,06	0,46	0,04	0,03	0,04	1,00	0,66	0,12	0,07
ZI	0,16	0,10	-0,12	0,01	0,12	0,20	0,01	0,11	0,04	0,14	0,53	0,11	0,02	0,06	0,66	1,00	0,13	0,13
ZL	0,32	0,16	-0,23	0,02	0,21	0,24	0,07	0,15	0,12	0,40	0,25	0,24	0,15	0,34	0,12	0,13	1,00	0,53

ZS	0,11	0,13	-0,20	0,04	0,06	0,18	0,15	0,20	0,05	0,18	0,12	0,20	0,08	0,49	0,07	0,13	0,53	1,00
----	------	------	-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Fonte: Autor (2020).

Tabela 8 - Soma das correlações

DOL	-1,76165
ETH	1,041149
NG	2,161517
BGI	2,180523
ICF	2,543785
ZG	2,997469
T	3,045799
KC	3,146142
ZC	3,324464
SB	3,341494
ZI	3,400825
HG	3,495222
PL	3,503278
ZS	3,513639
GPR	4,025526
ZL	4,238595
B	4,754215
<u>NYF</u>	<u>4,979982</u>

Fonte: Autor (2020).

4.1 Estudo de caso 1

O estudo de caso 1 representa o estudo dos ativos que possuem correlações maiores entre seus retornos diários, selecionaremos dois grupos dentre os 18 ativos possíveis:

- 1.1 As 9 maiores somas da tabela 8: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB.
- 1.2 As 4 maiores somas da tabela 8: NYF; B; ZL; GPR.

4.2 Estudo de caso 2

O estudo de caso 2 representa o estudo dos ativos que possuem as menores correlações entre seus retornos, selecionaremos dois grupos dentre os 18 ativos possíveis:

2.1 As 9 menores somas da tabela 8: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC.

2.2 As 4 menores somas da tabela 8: DOL; ETH; NG; BGI.

4.3 Estudo de caso 3

Para o estudo de caso 3, selecionaremos todos os 18 ativos.

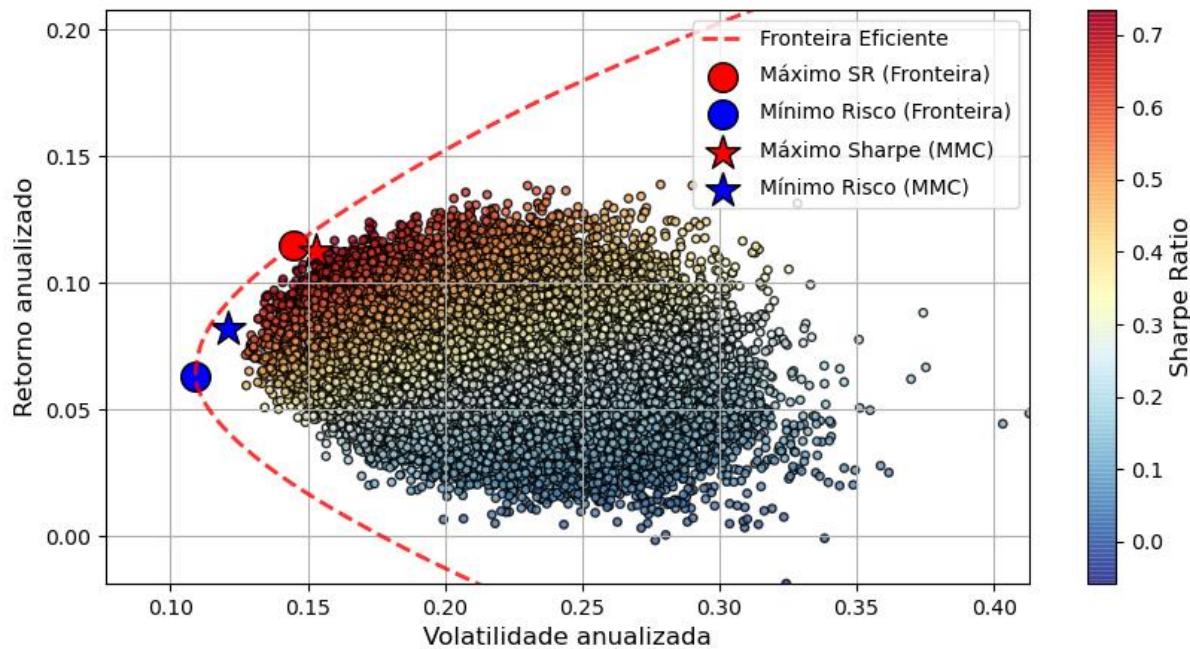
5 RESULTADOS

5.1 Estudo de caso 1: ativos com correlações altas

5.1.1 Grupo 1.1: correlações altas e alto número de ativos

Composto pelos ativos que apresentam as 9 maiores somas da tabela 8: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB. Para este estudo é esperado que a TMP seja pouco viável para selecionar portfólios eficientes, devido aos ativos apresentarem maiores correlações entre seus retornos históricos. A figura 5 apresenta o gráfico contendo a fronteira eficiente de Markowitz calculada com programação quadrática (linha vermelha tracejada) e os pontos da simulação de Monte Carlo. Os portfólios que contém o risco minimizado e máximo *Sharpe Ratio* também estão marcados no gráfico. Vemos que as simulações se afastaram da curva minimizada, ao verificar a tabela 9 que contém os dados obtidos com este grupo, verifica-se que na programação quadrática há mais incidência de alocações nulas. Este pode ser o principal motivo das simulações ficarem distantes da fronteira eficiente, uma vez que a incidência de pesos nulos na SMC se mostrou mais rara em todos os testes realizados.

Figura 5 – Fronteira Eficiente para os 9 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1)



Fonte: Autor (2020).

Tabela 9 – Portfólios eficientes e indicadores para os 9 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1)

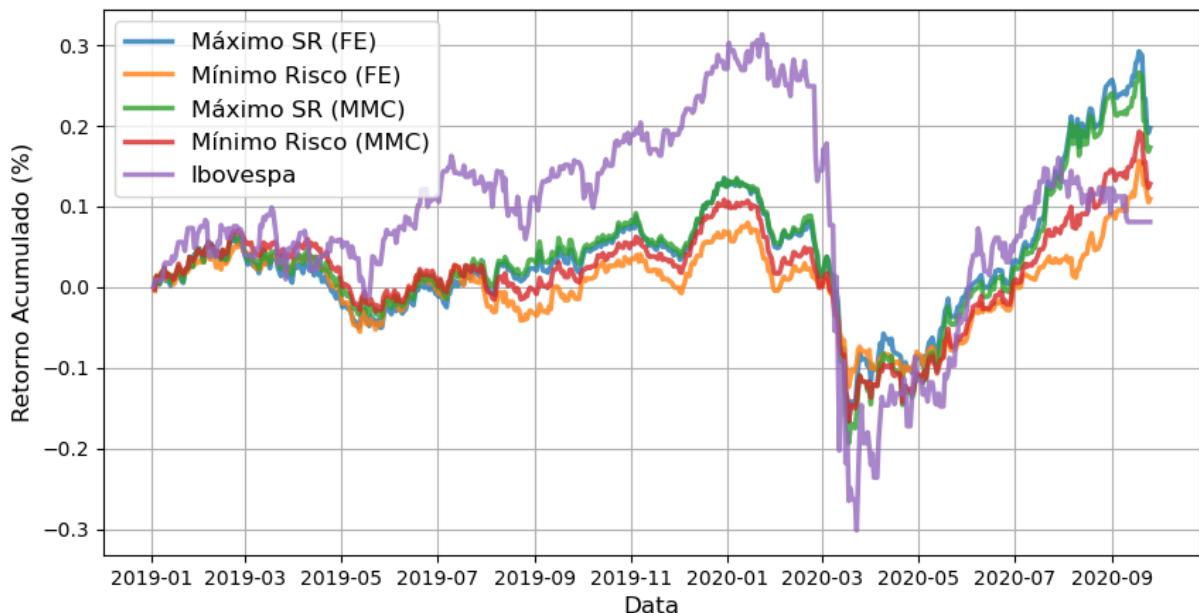
	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
B	0,02	0,03	0,00	0,00
GPR	0,02	0,01	0,01	0,00
HG	0,15	0,30	0,17	0,28
NYF	0,01	0,00	0,00	0,00
PL	0,03	0,03	0,00	0,04
SB	0,08	0,07	0,08	0,10
ZI	0,26	0,09	0,25	0,01
ZL	0,23	0,17	0,30	0,04
ZS	0,19	0,30	0,19	0,54
Índice Sharpe	0,73	0,67	0,79	0,58
Índice Shannon	0,83	0,77	0,87	0,67

Fonte: Autor (2020).

Nota-se que para os 9 ativos mais correlacionados os índices de Sharpe estão todos abaixo do valor unitário, representando uma ineficiência de risco vs retorno, ou seja, o risco é maior do que o retorno esperado. Em relação ao índice de Shannon, os portfólios de máximo Sharpe se destacaram, o que não é intuitivo segundo a teoria de Markowitz, onde é dito que a diversificação diminui o risco. Isso mostra que a escolha do Índice de Shannon pode não ser verdadeiramente representativa de diversificação quando falamos de portfólios eficientes.

O próximo passo é verificar o desempenho deste grupo, a figura 6 representa o retorno acumulado dos portfólios da tabela 9 junto ao retorno acumulado do IBOVESPA, que representa apenas o momento histórico de estresse dos mercados em março de 2020, devido à crise do Corona vírus.

Figura 6 – Retorno acumulado para os portfólios selecionados com os 9 ativos mais correlacionados: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 1.1)



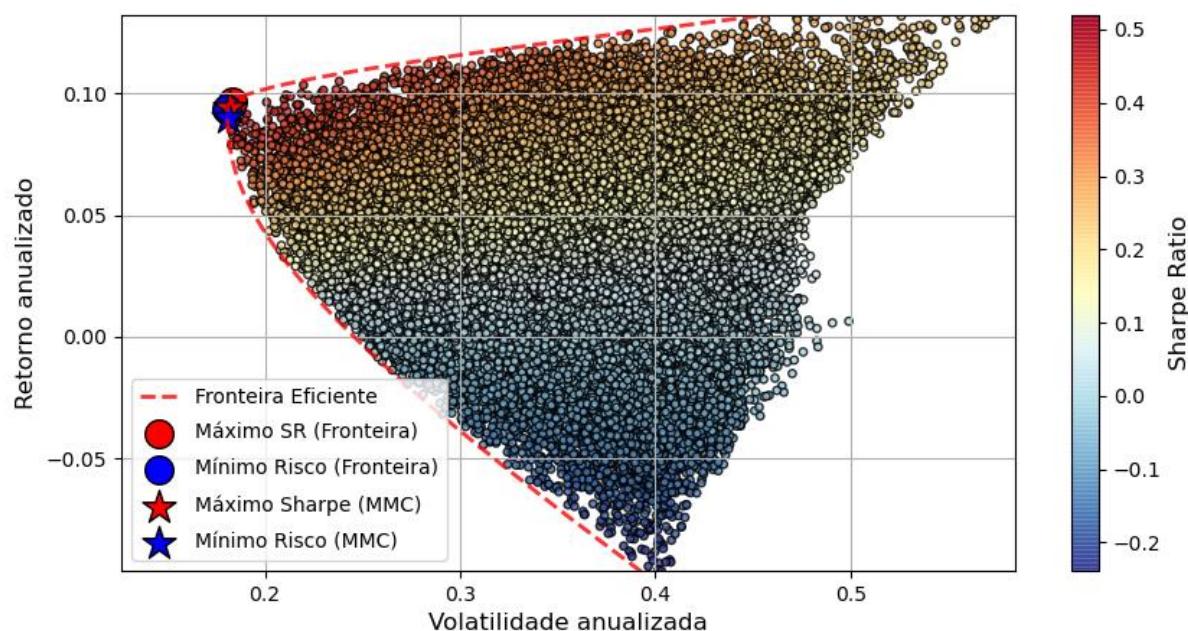
Fonte: Autor (2020).

É possível notar que todos os portfólios do Grupo 1 possuem curvas próximas e desempenharam muito negativamente durante a crise, como observado em março de 2020.

5.1.2 Grupo 1.2: correlações altas e baixo número de ativos

A figura 7 representa a TMP aplicada ao grupo 2: NYF; B; ZL; GPR. Nota-se como os portfólios de mínimo risco e máximo Sharpe se concentraram em apenas um único ponto no gráfico. Isso é verificado na tabela 10, onde vemos que para poucos ativos que possuem altas correlações a TMP é ineficiente.

Figura 7 - Fronteira Eficiente para os 4 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2)



Fonte: Autor (2020).

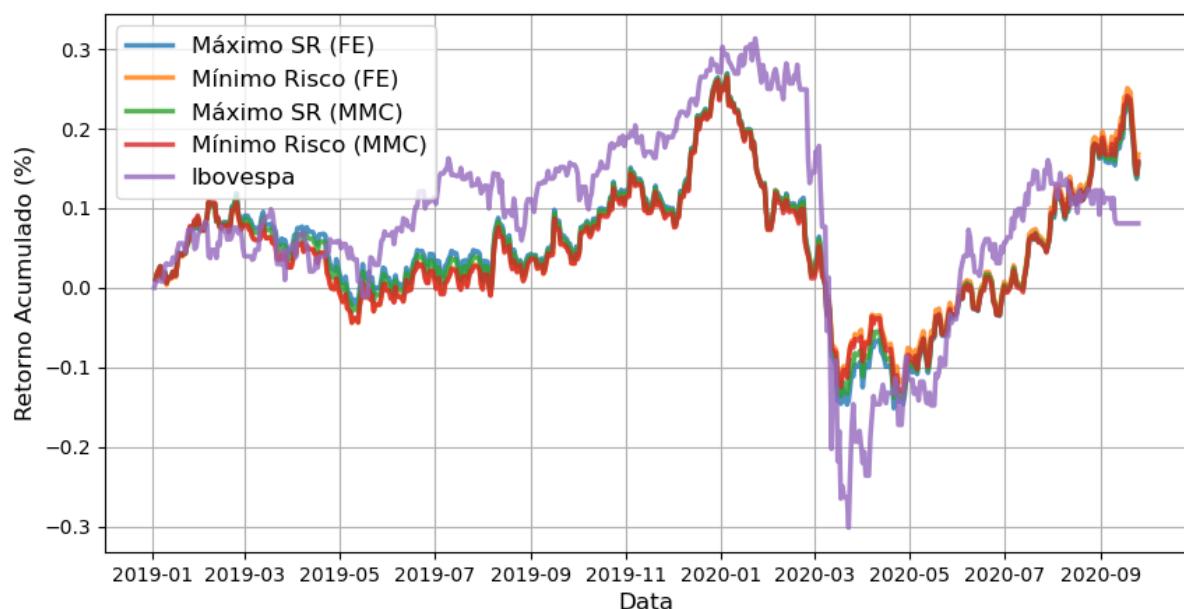
Tabela 10 - Retorno acumulado para os portfólios selecionados com os 4 ativos mais correlacionados: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2)

	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
B	0,00	0,03	0,00	0,00
GPR	0,05	0,01	0,08	0,03
NYF	0,00	0,00	0,00	0,00
ZL	0,94	0,96	0,92	0,97
Índice Sharpe	0,52	0,50	0,53	0,52
Índice Shannon	0,19	0,14	0,40	0,13

Fonte: Autor (2020).

Ambos os métodos apresentam alta concentração em um único ativo (ZL). A TMP seleciona, neste caso, o ativo que apresenta a melhor relação risco vs retorno para compor o portfólio, já que os ativos possuem altas correlações. A diferença se dá pelo índice de Shannon, que para o portfólio de máximo Sharpe da programação quadrática apresentou um valor maior em relação aos outros. Mas ao verificar o gráfico de retorno acumulado da figura 8, não é encontrada diferença significativa entre os portfólios no período de alta volatilidade:

Figura 8 – Retorno acumulado para os 4 ativos com maiores correlações: NYF; B; ZL; GPR (EC 1.2)



Fonte: Autor (2020).

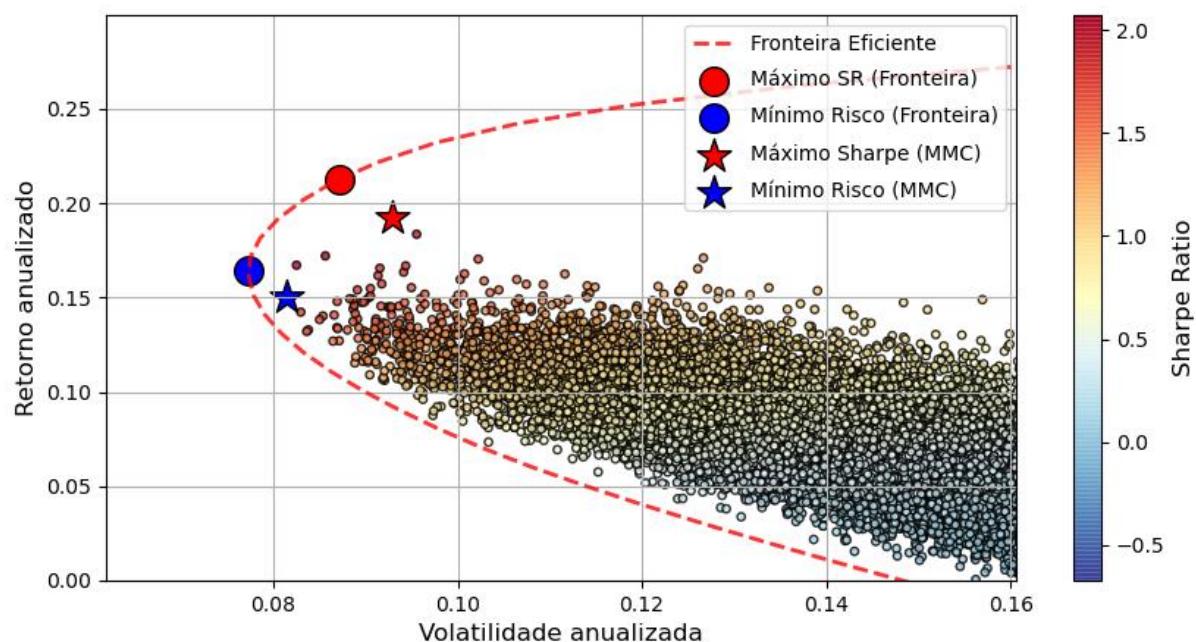
5.2 Estudo de caso 2

5.2.1 Grupo 2.1: correlações baixas e alto número de ativos

Composto pelos ativos que apresentam as 9 menores somas da tabela 8: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC. Para este estudo é esperado que a TMP selecione os portfólios mais eficientes, devido aos ativos apresentarem menores correlações entre seus retornos históricos. A figura 9 apresenta o gráfico contendo a fronteira eficiente

de Markowitz calculada com programação quadrática (linha vermelha tracejada) e os pontos da simulação de Monte Carlo. Vemos que as simulações se afastaram da curva minimizada, ao verificar a tabela 11 que contém os dados obtidos com este grupo, verifica-se que na programação quadrática há mais incidência de alocações nulas nos portfólios de máximo sharpe.

Figura 9 - Fronteira Eficiente para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1)



Fonte: Autor (2020).

Tabela 11 - Portfólios Eficientes e indicadores para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1)

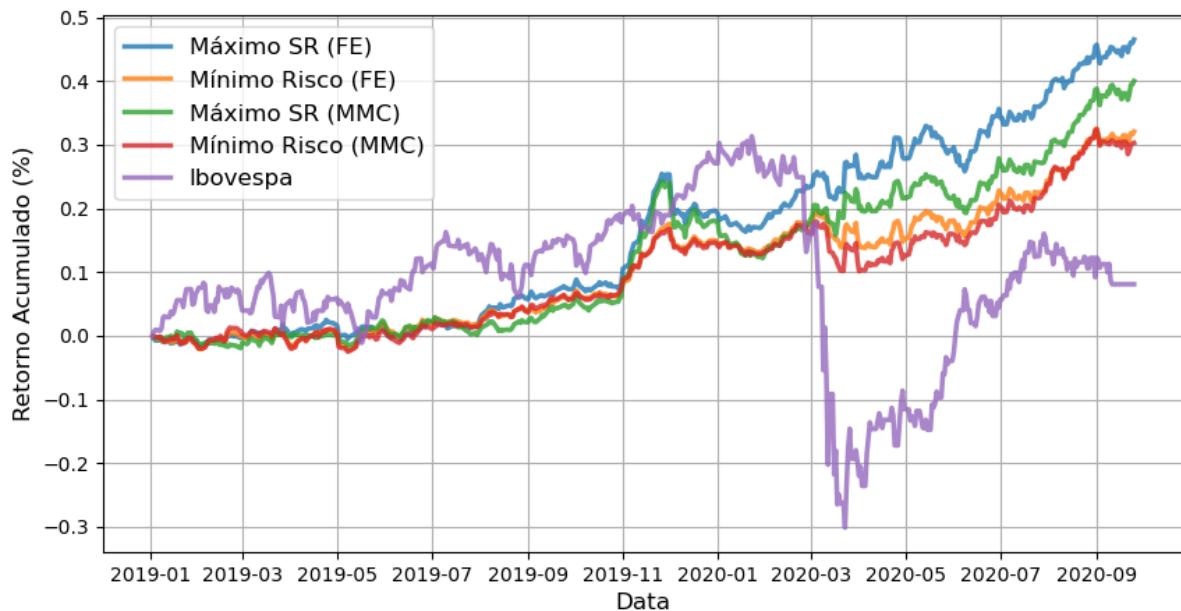
	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
BGI	0,42	0,19	0,37	0,21
DOL	0,31	0,26	0,35	0,32
ETH	0,00	0,17	0,07	0,14
ICF	0,01	0,01	0,00	0,04
KC	0,09	0,05	0,06	0,04
NG	0,03	0,05	0,00	0,02
T	0,00	0,00	0,00	0,00
ZC	0,10	0,07	0,00	0,10

ZG	0,03	0,20	0,15	0,14
Índice Sharpe	2,07	1,85	2,44	2,13
Índice Shannon	0,67	0,84	0,85	0,82

Fonte: Autor (2020).

Para este grupo é possível afirmar que os portfólios obtidos com programação quadrática apresentaram um *Sharpe Ratio* aproximadamente 16% superior aos da SMC. Já o índice de Shannon não apresentou diferenças significativas, exceto para o SMC Máx. Sharpe. Na figura 10 verificamos o desempenho:

Figura 10 - Retorno acumulado para os 9 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC (EC 2.1)



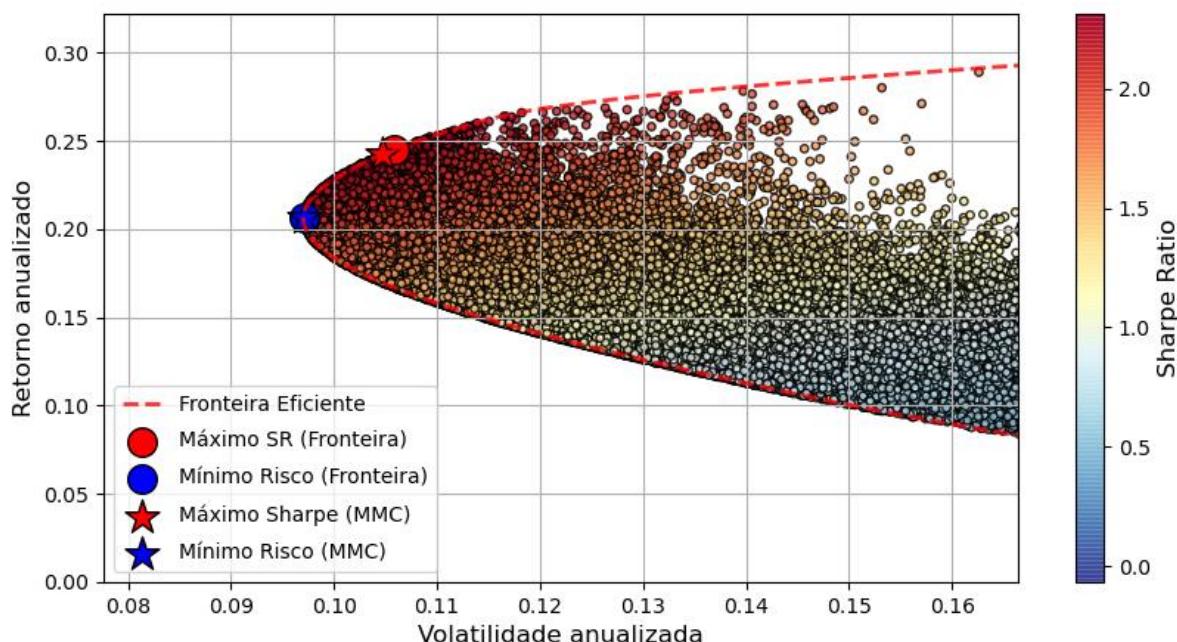
Fonte: Autor (2020).

Nota-se um distanciamento significativo das curvas de máximo SR, onde a curva azul do portfólio obtido com programação quadrática se destaca em relação à SMC. Já as curvas de mínimo risco estão mais próximas. Na figura 10 é possível notar que os pontos de mínimo risco estão mais próximos do que os de máximo Sharpe, concordando com o gráfico de retorno acumulado. Outro ponto a ser notado é como as curvas se comportaram na crise: quando comparados com o EC1, visualmente é verificado que durante a crise os portfólios selecionados a partir de ativos pouco correlacionados apresentaram menor volatilidade (risco) durante períodos de estresse.

5.2.2 Grupo 2.2: correlações baixas e baixo número de ativos

A figura 11 representa a TMP aplicada ao grupo 2.2: DOL; ETH; NG; BGI. Os pontos de interesse, assim como no grupo 1.2, estão juntos, com a exceção de que os portfólios de mínimo risco e máximo Sharpe estão separados. Além disso os pontos da SMC estão encostando na fronteira eficiente, mostrando que a SMC é tão eficiente quanto a programação quadrática quando se tem um número menor de ativos para escolher. Isso também é verificado na tabela 12, onde verificados indicadores praticamente idênticos para os dois métodos, além dos pesos de cada portfólio estarem extremamente próximos.

Figura 11 - Fronteira Eficiente para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)



Fonte: Autor (2020).

Tabela 12 - Portfólios eficientes e indicadores para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)

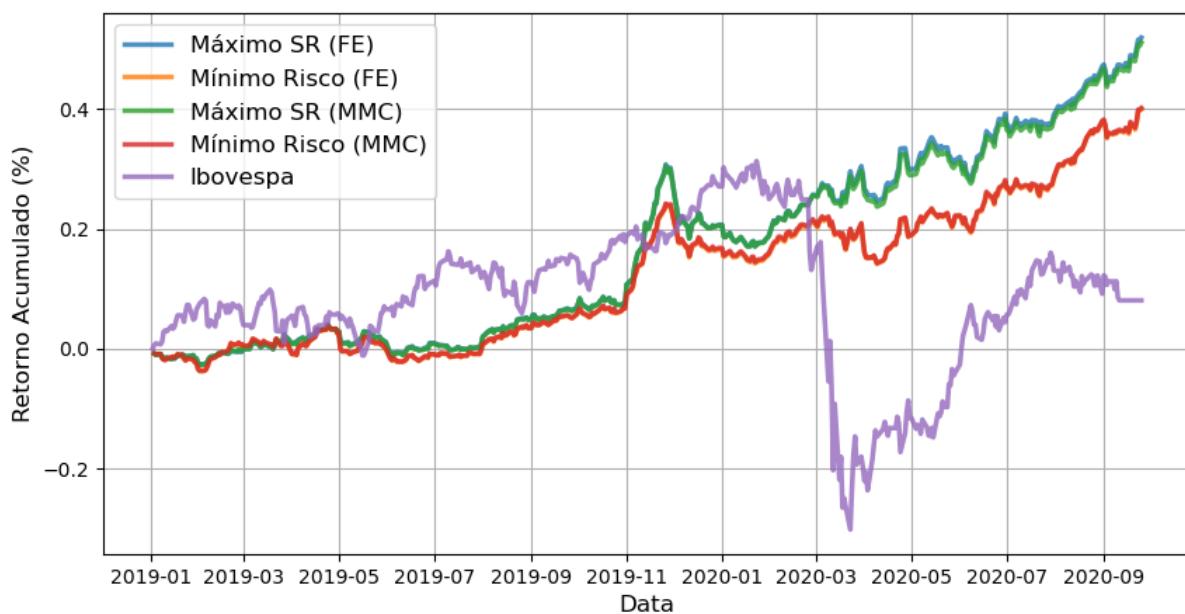
	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
BGI	0,50	0,37	0,51	0,37
DOL	0,40	0,39	0,41	0,39
ETH	0,09	0,20	0,08	0,20

NG	0,00	0,04	0,00	0,04
Índice Sharpe	2,31	2,13	2,32	2,12
Índice Shannon	0,69	0,86	0,66	0,86

Fonte: Autor (2020).

Podemos constatar pelo gráfico de desempenho (figura 12) que ambos os métodos retornaram os mesmos portfólios, já que as curvas estão coincidindo. Além disso, é constatado novamente que o uso de ativos pouco correlacionados para compor o portfólio causa uma diminuição significativa no risco (volatilidade) da carteira, o efeito dessa diminuição de risco do portfólio pode ser observado em momentos de estresse das bolsas, como observado durante a queda do IBOVESPA em março e abril.

Figura 12 - Retorno acumulado para os 4 ativos com menores correlações: DOL; ETH; NG; BGI (EC 2.2)



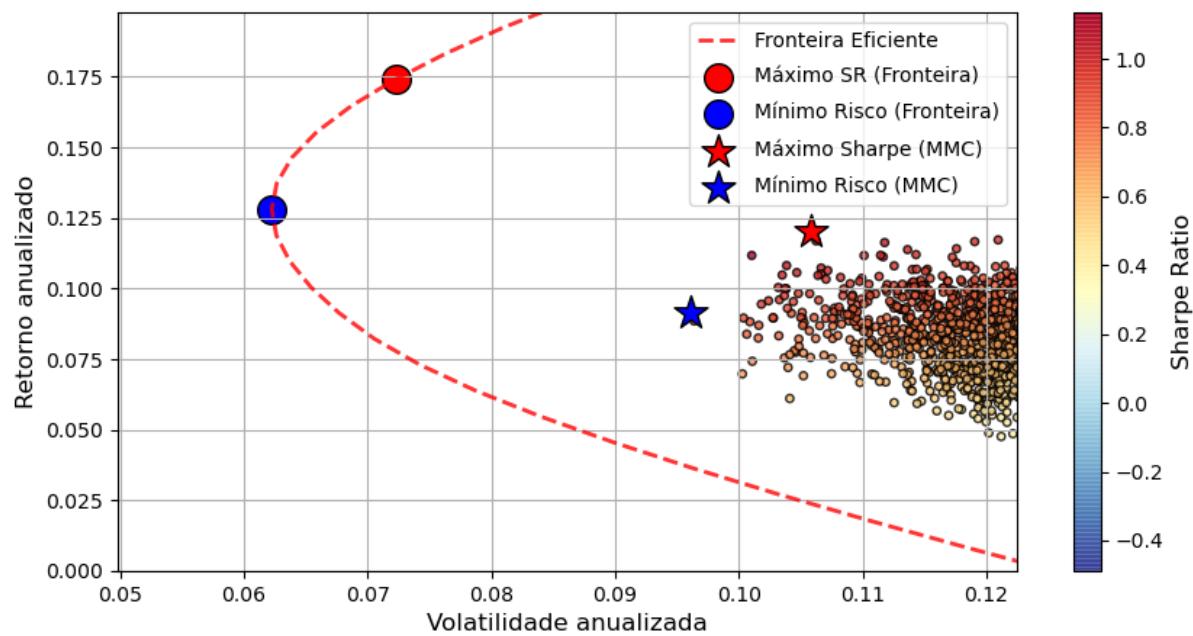
Fonte: Autor (2020).

5.3 Estudo de caso 3: total de ativos disponíveis

O estudo de caso 3 é a TMP aplicada para todos os contratos de commodities definidos na tabela 6: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB.

Na figura 13 verificamos a fronteira eficiente de Markowitz utilizando ambos os métodos. Visivelmente é possível verificar que ao aumentar a gama de ativos, o método de Monte Carlo se afasta cada vez mais da fronteira eficiente minimizada por algoritmo quadrático. A tabela 13 contém os dados deste estudo.

Figura 13 - Fronteira Eficiente para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)



Fonte: Autor (2020).

Tabela 13 - Portfólios eficientes e indicadores para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)

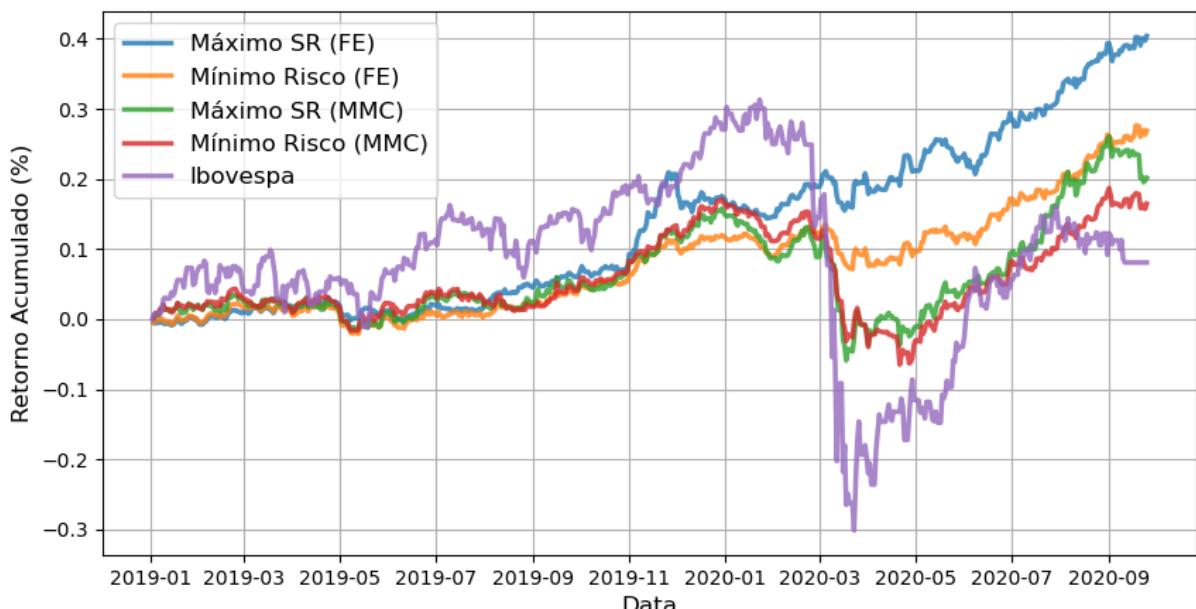
	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
B	0,02	0,04	0,00	0,00
BGI	0,12	0,12	0,29	0,12
DOL	0,09	0,13	0,34	0,30
ETH	0,06	0,10	0,05	0,09
GPR	0,02	0,00	0,01	0,00
HG	0,11	0,04	0,06	0,11
ICF	0,01	0,07	0,00	0,04
KC	0,12	0,04	0,04	0,01
NG	0,03	0,00	0,00	0,01

NYF	0,01	0,03	0,00	0,00
PL	0,05	0,05	0,00	0,01
SB	0,05	0,10	0,02	0,04
T	0,00	0,01	0,00	0,00
ZC	0,04	0,08	0,00	0,00
ZG	0,11	0,04	0,10	0,07
ZI	0,08	0,01	0,01	0,00
ZL	0,01	0,08	0,04	0,03
ZS	0,06	0,06	0,03	0,17
Índice Sharpe	1,14	0,95	2,41	2,06
Índice Shannon	0,90	0,90	0,76	0,81

Fonte: Autor (2020).

De acordo com os dados apresentados na tabela 13, o algoritmo de otimização apresentou um índice Sharpe aproximadamente 115% superior ao da SMC. Isso mostra uma diferença maior que o dobro em relação ao indicador calculado para os portfólios das simulações. Já o índice de Shannon não apresentou implicações significativas na análise de desempenho dos portfólios. Na figura 14 verificamos o desempenho dos portfólios.

Figura 14 – Retorno acumulado para todos os 18 ativos: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC; NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB (EC 3)



Fonte: Autor (2020).

As curvas da fronteira eficiente superaram as da SMC. Nota-se que inclusive a curva de mínimo risco da fronteira superou a de máximo Sharpe da simulação. Utilizar um algoritmo de otimização para a TMP se mostrou mais eficiente quando há uma gama maior de ativos para selecionar.

6 DISCUSSÃO

Pelos resultados obtidos na seção 5, podemos fazer a comparação entre os casos com base nos indicadores escolhidos e pelos gráficos de desempenho. A tabela 14, abaixo, mostra os indicadores de Sharpe obtidos nos estudos de caso desenvolvidos. Vale relembrar que quanto maior o indicador de Sharpe, melhor é a relação de retorno esperado contra o risco dos portfólios, ou seja, com um Sharpe alto teremos um retorno esperado maior com menos risco. O método que melhor desempenhou será aquele que obteve o maior indicador Sharpe, pois será considerado o mais eficiente.

Tabela 14 – Indicadores de Sharpe obtidos nos estudos de caso desenvolvidos

	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
EC1.1 Sharpe (9 commodities mais correlacionadas)	0,73	0,67	0,79	0,58
EC1.2 Sharpe (4 commodities mais correlacionadas)	0,52	0,50	0,53	0,52
EC2.1 Sharpe (9 commodities menos correlacionadas)	2,07	1,85	2,44	2,13
EC2.2 Sharpe (4 commodities menos correlacionadas)	2,31	2,13	2,32	2,12
EC3 Sharpe (todas as 18 commodities)	1,14	0,95	2,41	2,06

Fonte: Autor (2020).

Markowitz (1952) diz que o investidor deve utilizar ativos não correlacionados para que a TMP tenha o melhor efeito de diversificação e minimização de risco. Como observado na tabela 14, pode-se verificar que o estudo de caso 1 (EC1) apresentou o pior desempenho de risco *versus* retorno, sendo o estudo que continha os ativos com maiores correlações gerais, concordando com Markowitz. Os indicadores do EC1 também se mostraram bem próximos numericamente, salvo o grupo 1, que contém um número de ativos maior, onde o Sharpe diferiu levemente entre os métodos de SMC e o de minimização por programação quadrática. Nota-se pela figura 5 do EC1.1, que os portfólios da SMC estavam ligeiramente distanciados da Fronteira Eficiente

(minimização), explicando a leve diferença entre os indicadores Sharpe obtidos entre os métodos no EC1.1 da tabela 14.

Entrando na análise do Estudo de Caso 2 (EC2), verificamos os maiores indicadores de Sharpe obtidos, o que é explicado pelas menores correlações que estas commodities possuíam entre si, tendo efeito na redução de risco do portfólio, como verificamos pelo alto Sharpe e pelas figuras 10 e 12, onde o desempenho do portfólio no momento de crise apresentou pouco declínio. Verificamos que para 9 ativos, o método de SMC teve pior desempenho do que para 4 ativos.

Constatamos pelas figuras 9 e 11 que os portfólios da SMC se distanciaram da Fronteira Eficiente quando o número de ativos era maior. Se compararmos os pesos obtidos da tabela 11 (EC2.1), verificamos que com um número maior de ativos a quantidade de alocações zeradas é maior no método de minimização do que no de simulação. Desta forma, o método de minimização mostrou-se de 15 a 18% mais eficiente em termos de Sharpe quando o número de ativos era maior. Verifica-se que para o EC2.2, onde eram 4 ativos de baixas correlações, o gráfico de retorno acumulado (figura 12) foi praticamente igual para ambos os métodos. Isto também se deu no estudo de caso 1, onde o grupo 2 apresentou portfólios quase idênticos. Desta forma, pode-se dizer que para poucos ativos a SMC se mostrou tão eficiente quanto o método de minimização.

Por último, no estudo de caso 3 (EC3), que continha todas as 18 commodities, verificamos uma grande diferença em termos de Sharpe, onde a minimização se mostrou muito superior, com Sharpe aproximadamente 115% mais alto em relação aos obtidos com a SMC. Além disso, na figura 14 também observamos que os portfólios da fronteira eficiente tiveram desempenho superior aos da SMC.

A tabela 15 abaixo apresenta os indicadores de Shannon-Wiener para cada estudo de caso.

Tabela 15 - Indicadores de Shannon-Wiener obtidos nos estudos de caso desenvolvidos

	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
EC1.1 Shannon (9 commodities mais correlacionadas)	0,83	0,77	0,87	0,67
EC1.2 Shannon (4 commodities mais correlacionadas)	0,19	0,14	0,40	0,13
EC2.1 Shannon (9 commodities menos correlacionadas)	0,67	0,84	0,85	0,82
EC2.2 Shannon (4 commodities menos correlacionadas)	0,69	0,86	0,66	0,86
EC3 Shannon (todas as 18 commodities)	0,90	0,90	0,76	0,81

Fonte: Autor (2020).

O objetivo de empregar o indicador de Shannon para os portfólios obtidos era tentar estabelecer um número que indicasse o quão diversificado está a carteira. Como o indicador foi utilizado por Araujo (2019) para analisar a evolução da diversificação de um portfólio de energia, surgiu ideia de tentar empregar o mesmo para a carteira de commodities dos estudos de caso deste trabalho. Entretanto, não foi verificado nenhum padrão ou diferença entre eles que permite comparar ambos os métodos de acordo com suas diversificações.

7 CONCLUSÕES

Com o objetivo de comparar o desempenho de dois métodos de seleção de portfólios com riscos minimizados usando a Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1952), foi desenvolvido um algoritmo em Python que possibilitou utilizar minimização de risco por programação quadrática e as simulações de Monte Carlo para obter portfólios eficientes de commodities, independentemente do número de ativos que eram considerados no estudo.

Para comparar o desempenho de ambos os métodos, foi empregado o indicador de Sharpe e o indicador de Shannon-Wiener, sendo o primeiro utilizado para encontrar o portfólio eficiente com a maior relação risco-retorno e o segundo com o objetivo de ser um indicador do nível de diversificação da carteira. Também, como forma de comparar visualmente o desempenho dos portfólios obtidos durante crises, foi desenvolvida a série de retorno acumulado das carteiras, como forma de poder verificar visualmente o desempenho dos portfólios durante a crise do Covid-19.

A metodologia utilizada neste trabalho se baseou no desenvolvimento de três estudos de casos que possibilitariam entender as diferenças entre os métodos de acordo com as correlações entre os ativos disponíveis. Para tanto, somamos as linhas da matriz de correlação e obtivemos uma correlação geral para cada ativo, onde posteriormente essas correlações gerais foram utilizadas para selecionar os três estudos de caso, sendo o primeiro composto pelos ativos que apresentavam as maiores correlações gerais, o segundo pelos ativos que apresentavam as menores correlações gerais e o terceiro estudo era composto por todos os ativos.

Dessa forma, esperava-se comparar ambos os métodos (programação quadrática e simulação de Monte Carlo) em cenários distintos.

No primeiro estudo de caso, os métodos foram aplicados para as commodities que apresentavam as maiores correlações gerais. No segundo estudo de caso, os métodos foram aplicados para as commodities que apresentavam as menores correlações gerais. O estudo de caso 3 era composto pelas 18 commodities disponíveis. O objetivo de separar os estudos 1 e 2 em dois grupos cada foi para, além

de comparar o efeito das correlações, comparar o efeito do aumento de ativos na seleção dos portfólios com ambos os métodos.

Com os resultados obtidos, pode-se concluir que:

1. A simulação de Monte Carlo se mostra eficiente apenas com um número baixo de ativos a serem selecionados.
2. A minimização por programação quadrática se mostrou superior em todos os estudos de caso e pode ser utilizada para qualquer número de commodities.
3. O uso de ativos com correlações baixas para compor o portfólio aumenta consideravelmente o indicador Sharpe.
4. Ao utilizar ativos com altas correlações, ambos os métodos SMC e de programação quadrática tendem a alocar todo o portfólio no ativo que contém a melhor relação risco-retorno.
5. Para um número elevado de ativos, os portfólios obtidos com a SMC se distanciam da Fronteira Eficiente, perdendo eficiência na seleção destes portfólios.
6. O indicador de Shannon-Wiener não se mostrou útil para comparar a diversificação dos portfólios eficientes.
7. Os portfólios do Estudo de Caso 2, que continham ativos com correlações baixas, desempenharam muito melhor do que os ativos do Estudo de Caso 1 durante a crise do Corona vírus, verificado pelas linhas do gráfico de desempenho que não acompanharam a queda do IBOVESPA durante a crise.

O objetivo de desenvolver um algoritmo e comparar os dois métodos de seleção de portfólios eficientes foi atingido, mas ressalvam-se alguns pontos que podem ser explorados em estudos posteriores:

1. Criar um algoritmo para estabelecer um número mais aproximado de ativos onde o Método de Monte Carlo começa a perder eficiência. Neste estudo comparamos 4, 9 e 18 ativos. Mas como o comportamento dos métodos evoluem conforme aumentamos ativo por ativo pode ser explorado futuramente em análises quantitativas.

2. Utilizar uma gama maior de commodities ou outros ativos financeiros para poder obter resultados mais precisos quando são analisados ativos com correlações mais altas ou mais baixas.
3. Utilizar métodos diferentes de minimização e compará-los.
4. Considerar portfólios onde é possível ter posições vendidas.

REFERÊNCIAS

- ALMONACID, G. A. **Aplicabilidade da teoria de Markowitz para investimentos em ativos do real estate: estudo de caso de uma carteira mista.** 76 f. Monografia (MBA-USP - Real Estate Economia e Mercados) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2010.
- ARAUJO, M. W. L. **Optimization of the brazilian energy supply structure using the modern portfolio theory.** Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia de Petróleo) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2019.
- BOARD, J.; SUTCLIFFE, C. M.; ZIEMBA, W. T. Portfolio selection: Markowitz mean-variance model. **Encyclopedia of Optimization**, 2008.
- DELLANO-PAZ, F. *et al.* The technological and environmental efficiency of the EU-27 power mix: An evaluation based on MPT. **Energy**, v. 69, p. 67-81, Mai. 2014.
- DELLANO-PAZ, F. *et al.* Energy planning and modern portfolio theory: A review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 77, p. 636-651, 2017.
- ELTON, E. J. **Modern portfolio theory and investment analysis.** 9. ed., 2014. 738 p. ISBN 978-1-118-46994-1.
- FILHO, D. B. F.; JÚNIOR, J. A. S. Desvendando os mistérios do coeficiente de correlação de Pearson (r). **Revista Política Hoje**, v. 18, n. 1, p. 115-146, 2009.
- FIRICAN, George. **How data is (and isn't) like oil.** 22 abr. 2019. Disponível em: <https://tdwi.org/articles/2019/04/22/data-all-how-data-is-like-oil.aspx>. Acesso em: 12 set. 2020.
- JÚNIOR, A. F. S.; TABOSA, C. M.; COSTA, R. P. Simulação de Monte Carlo aplicada à análise econômica de pedido. **Produção**, v. 21, n. 1, p. 149-164, Jan./mar. 2011.
- KRAFT, D. A software package for sequential quadratic programming. **Tech. Rep. DFVLR-FB 88-28**, 1988.
- LIOUDIS, N. **Understanding the sharpe ratio.** 21 jun. 2019. Disponível em: https://www.investopedia.com/articles/07/sharpe_ratio.asp. Acesso em: 4 set. 2020.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, Mar. 1952.
- ROSS, S. **Correlation and modern portfolio theory.** 24 fev. 2020. Disponível em: <https://www.investopedia.com/ask/answers/030515/how-correlation-used-modern-portfolio-theory.asp>. Acesso em: 14 set. 2020.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. **Management Science**, v. 9, n. 2, p. 277-293, Jan. 1963.

WHANG, Steven E. **Data analytics: integration and privacy**. Dissertação (Doutorado em Filosofia) - Stanford University, Computer Science Department, 2012.



ANÁLISE ENTRE FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ E SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA CARTEIRA DE COMMODITIES

Gabriel Costa Martinez Garicoits

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Santos Goria

Artigo Sumário referente à disciplina PMI3349 – Trabalho de Formatura para Engenharia de Petróleo II
Este artigo foi preparado como requisito para completar o curso de Engenharia de Petróleo na Escola Politécnica da USP.

Resumo

No escopo financeiro da análise de dados, Markowitz (1952) desenvolveu um modelo de seleção de portfólios eficientes que ficou conhecido como Teoria Moderna do Portfólio (TMP). Sendo a teoria que o fez ser premiado com o Nobel de Economia em 1990, sua ideia principal é a definição de um modelo que seleciona diferentes ativos para compor uma carteira de investimentos que é chamada de portfólio eficiente, por ter seus riscos minimizados. Para isso, o modelo leva em consideração os riscos, retornos e correlações entre esses ativos. Seguindo a linha da TMP, o objetivo deste trabalho é realizar três estudos de caso com diferentes premissas para comparar o desempenho de dois métodos, a minimização por programação quadrática e as simulações de Monte Carlo, para a seleção de portfólios eficientes de commodities. O desempenho será comparado utilizando o índice de Sharpe, o índice de Shannon-Wiener e a série de retorno acumulado dos portfólios obtidos. Para atingir o objetivo foi desenvolvido um algoritmo em Python, que permitiu realizar testes independentemente do número de ativos que são dados como input. Os resultados obtidos mostraram que a simulação de Monte Carlo é eficiente apenas com um número baixo de ativos a serem selecionados. A minimização por programação quadrática se mostrou superior em todos os estudos de caso e pode ser utilizada para qualquer número de ativos.

Palavras-chave: Otimização, Análise de dados, Fronteira Eficiente, Simulação de Monte Carlo, Teoria Moderna do Portfólio.

Abstract

In the financial scope of data analysis, Markowitz (1952) developed a efficient portfolio selection model that became known as Modern Portfolio Theory (MPT). As the theory that won him the Nobel Prize in Economics in 1990, his main idea is to define a model that selects different assets to compose an investment portfolio that is called an efficient portfolio, as its risks are minimized. The model takes into account the risks, returns and correlations between these assets. Following the line of MPT, the objective of this work is to carry out three case studies with different premises to compare the performance of two methods, the minimization by quadratic programming and Monte Carlo simulations, for the selection of efficient commodity portfolios. The performance will be compared using the Sharpe index, the Shannon-Wiener index and the cumulative return series of the efficient portfolios obtained. To achieve this objective, an algorithm in Python was developed, which allowed to perform tests regardless of the number of assets that are given as input. The results obtained showed that the Monte Carlo simulation is efficient only with a low number of assets to be selected. Minimization by quadratic programming proved to be superior in all case studies and can be used for any number of assets.

Keywords: Optimization, Data Analysis, Efficient Frontier, Monte Carlo Simulation, Modern Portfolio Theory.

1. Introdução

Clive Humby, um matemático e arquiteto da Tesco Clubcard, declarou em 2006 a frase “Data is the new oil.”. Ele elaborou dizendo que, como o óleo, dados são valiosos, mas se não forem refinados eles não poderão realmente ser utilizados (FIRICAN, 2019).

Segundo Whang (2012), a análise de dados se tornou um problema extremamente importante e desafiador em disciplinas como engenharia, ciências da computação, medicina, finanças, biologia e etc. Conforme quantidades cada vez maiores de dados se tornam disponíveis para serem analisados, mais importante se tornam as técnicas, métodos de análise e o tratamento destes dados.

No escopo financeiro da análise de dados, Markowitz (1952) desenvolveu um modelo de seleção de portfólios eficientes que ficou conhecido como Teoria Moderna do Portfólio (TMP). Sendo a teoria que o fez ser premiado com o Nobel de Economia em 1990, sua ideia principal é a definição de um modelo que seleciona diferentes ativos para compor uma carteira de investimentos que é chamada de portfólio eficiente, por ter seus riscos minimizados. Para isso, o modelo leva em consideração os riscos, retornos e correlações entre esses ativos.

Desde o seu desenvolvimento, a TMP foi utilizada e aceita em escopos que diferem da especulação financeira. Segundo deLlano-Paz et al. (2017), é um modelo amplamente aceito em planejamento energético, por exemplo. Araujo (2019) segue as mesmas abordagens de deLlano-Paz et al. (2017) e deLlano-Paz et al. (2014) para otimizar e analisar os riscos da matriz energética brasileira.

Seguindo a linha da TMP, o objetivo deste trabalho é comparar o desempenho de dois métodos, a minimização por programação quadrática e as simulações de Monte Carlo, para a seleção de portfólios eficientes de commodities. O desempenho será comparado utilizando o índice de Sharpe, o índice de Shannon-Wiener e a série de retorno acumulado dos portfólios obtidos.

Para atingir o objetivo será desenvolvido um algoritmo em Python, que permitirá realizar testes independetemente do número de ativos que são dados como input. Por se tratar de uma abordagem numérica, os dados que são necessários para fazer uma análise eficiente devem ser confiáveis e possuir um período histórico relevante. Portanto, utilizaremos os dados de séries históricas de retornos diários de ativos que são facilmente encontrados na internet: commodities listadas tanto na bolsa brasileira como em bolsas estrangeiras.

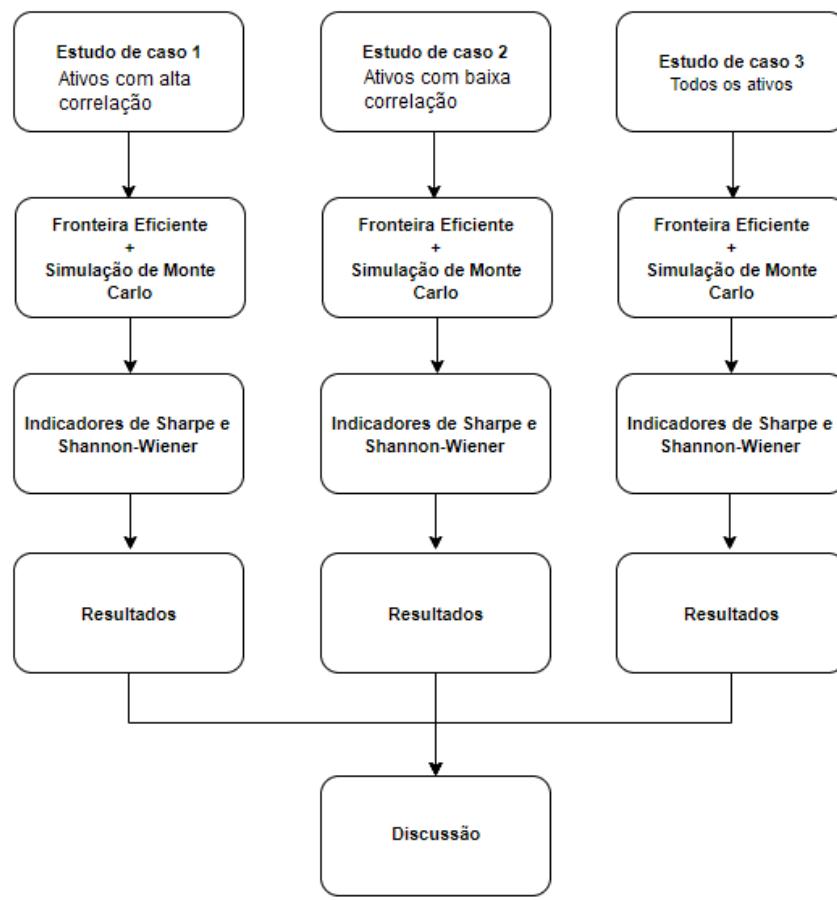
2. Metodologia

Serão realizados três estudos de caso utilizando os principais contratos futuros de commodities negociados. Utilizando os retornos diários destes ativos desde o início de 2019, a fronteira eficiente e as simulações de Monte Carlo podem ser construídas com o auxílio de uma linguagem de programação. Python foi a linguagem de programação escolhida por ser open-source e por ser a linguagem mais utilizada no tratamento de dados atualmente.

Os três estudos de caso diferem pelos ativos selecionados com base em suas correlações de Pearson. O objetivo é analisar os resultados da TMP ao construir a fronteira eficiente utilizando tanto a programação quadrática como as simulações de Monte Carlo.

A figura 1 representa a metodologia adotada para a seleção e obtenção de resultados para os estudos de caso desenvolvidos.

Figura 1- Metodologia do trabalho



Fonte: Autor (2020).

Os três estudos de caso da figura 1 diferem pelos ativos selecionados com base em suas correlações de Pearson. O objetivo é analisar os resultados da TMP ao construir a fronteira eficiente utilizando tanto a programação quadrática como as simulações de Monte Carlo.

Os ativos que entrarão em cada estudo serão definidos com base na matriz de correlações de Pearson. As linhas serão somadas e desta forma obtém-se a correlação geral de cada ativo, onde a menor soma representa o ativo mais descorrelacionado da lista e a maior soma representa o ativo mais correlacionado da lista.

Os contratos analisados estão representados na tabela 1.

Tabela 1 – Contratos de commodities utilizados

Produto	Código de negociação
Açúcar NY nº11	SB
Boi Gordo	BGI
Café Arábica 4 5	ICF
Café Contrato C	KC
Cobre	HG
Dólar Comercial USD BRL	DOL
Etanol Hidratado	ETH
Gás Natural	NG
Gasolina Reformulada RBOB	GPR
Milho NY	ZC
Óleo de Aquecimento	NYF
Óleo de Soja NY	ZL

Ouro	ZG
Petróleo Brent	B
Petróleo WTI	T
Platina	PL
Prata	ZI
Soja NY	ZS

Fonte: Autor (2020).

Estudo de caso 1: NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB.

Estudo de caso 2: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC.

Estudo de caso 3: DOL; ETH; NG; BGI; ICF; ZG; T; KC; ZC, NYF; B; ZL; GPR; ZS; PL; HG; ZI; SB.

2.1. Teoria Moderna do Portfólio

A função 1 representa o modelo desenvolvido por Markowitz (1952) utilizando a abordagem matricial (BOARD; SUTCLIFFE; ZIEMBA, 2008), dado que é a mesma abordagem utilizada no código desenvolvido neste trabalho.

$$\text{Função objetivo:} \quad \min \sigma_p^2 = x^T C x \quad \text{Função 1}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sujeita a:} & \\ & x^T r = r_p \quad \text{Restrição 1} \\ & x^T e = 1 \quad \text{Restrição 2} \\ & x \geq 0 \quad \text{Restrição 3} \end{array}$$

Onde:

x é a matriz coluna das proporções de cada ativo do portfólio;
 C é a matriz $n \times n$ de covariância dos retornos dos ativos do portfólio;
 r é a matriz coluna do retorno esperado de cada ativo;
 r_p é um dado retorno esperado do portfólio;
 $x^T e$ representa a soma dos elementos de x^T ;
 0 é a matriz coluna de zeros.

A Restrição 1 garante que o retorno esperado é igual ao retorno definido para o portfólio; A Restrição 2 garante que a soma dos pesos dos ativos será sempre igual à 100% do portfólio; É importante notar que para este estudo utilizamos a Restrição 3 que proíbe o short-selling, expressão em inglês que se refere a ficar vendido em um ativo, operação onde o investidor obtém ganhos com a queda do preço.

Pela Função 1 se tratar de um problema de programação não-linear e temos certas restrições, utilizaremos um método de otimização baseado em gradiente não linearmente restrita: programação sequencial de mínimos quadrados. A biblioteca SciPy do Python fornece o algoritmo Sequential Least Squares Programming (SLSQP), método utilizado para minimizar a Função 1.

2.2. Indicador Sharpe e Indicador Shannon-Wiener

O Indicador Sharpe (SHARPE, 1963), conhecido internacionalmente como Sharpe ratio, foi desenvolvido por William Sharpe em 1966, tem sido uma das mais referenciadas medidas de risco/retorno usada em finanças (LIOUDIS, 2019). O indicador quantifica o quanto há de excesso no retorno para o risco extra que o investidor aceita ao investir em um ativo de maior risco. Simplificadamente, é uma relação que indica o “tamanho” do retorno em relação ao risco, portanto o objetivo é encontrar a maior relação existente na Fronteira Eficiente. A equação 2 representa o Sharpe ratio para o portfólio.

$$s_r = \frac{(r_p - r_{alr})}{\sigma_p} \quad (2)$$

Onde:

r_p é o retorno esperado do portfólio;

r_{alr} é o retorno do ativo livre de risco;

σ_p é o risco do portfólio.

O índice de Shannon, representado pela equação 3, é um dos índices da diversidade usados para medir a diversidade em dados categóricos, resumidamente é a informação entrópica da distribuição, tratando as espécies como símbolos e os tamanhos da respectiva população como uma probabilidade.

$$H = - \frac{\sum_{i=1}^S w_i \ln (w_i)}{\ln S} \quad (3)$$

Onde:

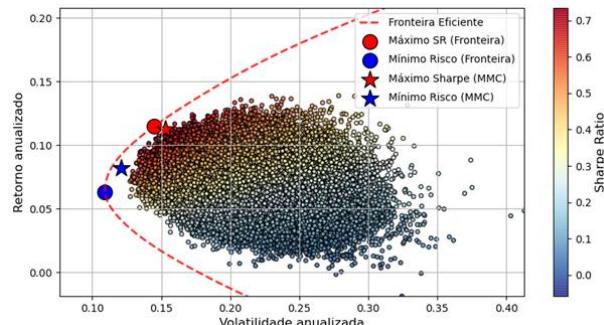
w_i é o peso de cada ativo no portfólio eficiente e $w_i > 0$;

S é o número de ativos.

3. Resultados

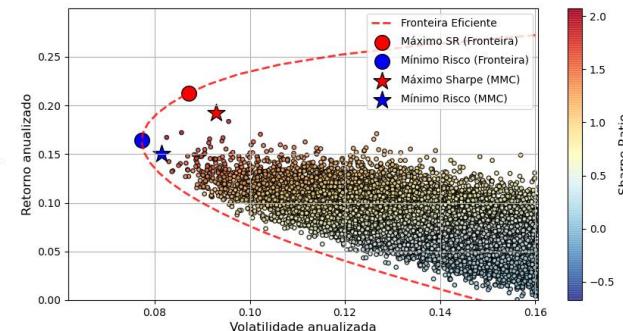
As figuras 2, 3 e 4 representam as fronteiras eficientes e simulações de Monte Carlo obtidas respectivamente para os estudos de caso 1, 2 e 3.

Figura 2 – Estudo de Caso 1



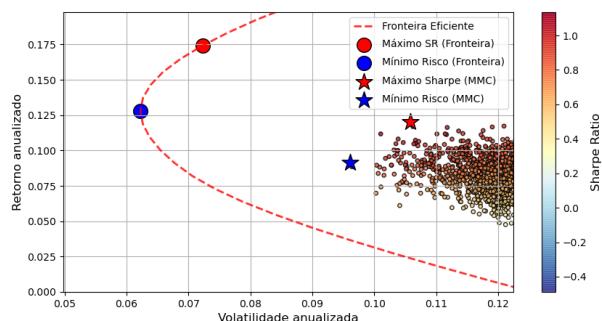
Fonte: Autor (2020).

Figura 3 – Estudo de Caso 2



Fonte: Autor (2020).

Figura 4 – Estudo de Caso 3



Fonte: Autor (2020).

A tabela 2 apresenta os indicadores obtidos com os 3 estudos de caso.

Tabela 2 - Comparação entre os índices de Sharpe obtidos.

	SMC (Máx. Sharpe)	SMC (Mín. Risco)	FE (Máx. Sharpe)	FE (Mín. Risco)
EC1	0,73	0,67	0,79	0,58
EC2	2,07	1,85	2,44	2,13
EC3	1,14	0,95	2,41	2,06

Fonte: Autor (2020).

Os indicadores de Shannon-Wiener não apresentaram diferenças significativas, não fornecendo nenhuma informação relevante quanto à diversificação dos portfólios.

Markowitz (1952) diz que o investidor deve utilizar ativos não correlacionados para que a TMP tenha o melhor efeito de diversificação e minimização de risco. Como observado na tabela 2, pode-se verificar que o estudo de caso 1 (EC1) apresentou o pior desempenho, sendo o estudo que continha os ativos com maiores correlações gerais, concordando com Markowitz. Os indicadores do EC1 também se mostraram bem próximos numericamente, salvo o grupo 1, que contém um número de ativos maior, onde o Sharpe diferiu levemente entre os métodos de SMC e o de minimização por programação quadrática.

Entrando na análise do Estudo de Caso 2 (EC2), verificamos os maiores indicadores de Sharpe obtidos, o que é explicado pelas menores correlações que estas commodities possuíam entre si, tendo efeito na redução de risco do portfólio, como verificamos pelo alto Sharpe e pela figura 3. Verificamos que o método de SMC teve pior desempenho do que o da programação quadrática.

No estudo de caso 3 (EC3), que continha todas as 18 commodities, verificamos uma grande diferença em termos de Sharpe, onde a minimização se mostrou muito superior, com Sharpe aproximadamente 115% mais alto em relação aos obtidos com a SMC.

4. Conclusão

Com o objetivo de comparar o desempenho de dois métodos de seleção de portfólios eficientes usando a Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1952), foi desenvolvido um algoritmo em Python que possibilitou utilizar minimização de risco por programação quadrática e as simulações de Monte Carlo para obter portfólios eficientes de commodities, independentemente do número de ativos que eram considerados no estudo.

Para comparar o desempenho de ambos os métodos, foi empregado o indicador de Sharpe e o indicador de Shannon-Wiener, sendo o primeiro utilizado para encontrar o portfólio eficiente com a maior relação risco-retorno e o segundo com o objetivo de ser um indicador do nível de diversificação da carteira. Também, como forma de comparar visualmente o desempenho dos portfólios obtidos durante crises, foi desenvolvida a série de retorno acumulado das carteiras, como forma de poder verificar visualmente o desempenho dos portfólios durante a crise do Covid-19.

A metodologia utilizada neste trabalho se baseou no desenvolvimento de três estudos de casos que possibilitariam entender as diferenças entre os métodos de acordo com as correlações entre os ativos disponíveis. Para tanto, somamos as linhas da matriz de correlação e obtivemos uma correlação geral para cada ativo, onde posteriormente essas correlações gerais foram utilizadas para selecionar os três estudos de caso, sendo o primeiro composto pelos ativos que apresentavam as maiores correlações gerais, o segundo pelos ativos que apresentavam as menores correlações gerais e o terceiro estudo era composto por todos os ativos.

Dessa forma, esperava-se comparar ambos os métodos (programação quadrática e simulação de Monte Carlo) em cenários distintos.

Nos estudos de caso 1 e 2, foram separados dois grupos em cada, o primeiro continha metade dos ativos disponíveis, 9 no total, e o outro grupo continha os 4 primeiros ativos de cada tipo de seleção, sendo maiores correlações e menores correlações, respectivamente para cada estudo. O estudo de caso 3 era composto pelas 18 commodities disponíveis. O objetivo de separar os estudos 1 e 2 em dois grupos cada foi para, além de comparar o efeito das correlações, comparar o efeito do aumento de ativos na seleção dos portfólios com ambos os métodos.

Com os resultados obtidos, pode-se concluir que:

1. A simulação de Monte Carlo se mostra eficiente apenas com um número baixo de ativos a serem selecionados.

2. A minimização por programação quadrática se mostrou superior em todos os estudos de caso e pode ser utilizada para qualquer número de ativos.
3. O uso de ativos com correlações baixas para compor o portfólio aumenta consideravelmente o indicador Sharpe.
4. Ao utilizar ativos com altas correlações, ambos os métodos SMC e de programação quadrática tendem a alocar todo o portfólio no ativo que contém a melhor relação risco-retorno.
5. Para um número elevado de ativos, os portfólios obtidos com a SMC se distanciam da Fronteira Eficiente, perdendo eficiência na seleção destes portfólios.
6. O indicador de Shannon-Wiener não se mostrou útil para comparar a diversificação dos portfólios eficientes.

O objetivo de desenvolver um algoritmo e comparar os dois métodos de seleção de portfólios eficientes foi atingido, mas ressalvam-se alguns pontos que podem ser explorados em estudos posteriores:

1. Criar um algoritmo para estabelecer um número mais aproximado de ativos onde o Método de Monte Carlo começa a perder eficiência. Neste estudo comparamos 4, 9 e 18 ativos. Mas como o comportamento dos métodos evoluem conforme aumentamos ativo por ativo pode ser explorado futuramente em análises quantitativas.
2. Utilizar uma gama maior de ativos para poder obter resultados mais precisos quando são analisados ativos com correlações mais altas ou mais baixas.
3. Utilizar métodos diferentes de minimização e compará-los.
4. Considerar portfólios onde é possível ter short selling (posições vendidas).

5. Referências

ARAUJO, M. W. L. Optimization of the brazilian energy supply structure using the modern portfolio theory. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia de Petróleo) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2019.

BOARD, J.; SUTCLIFFE, C. M.; ZIEMBA, W. T. Portfolio selection: Markowitz mean-variance model. Encyclopedia of Optimization, 2008.

DELLANO-PAZ, F. et al. The technological and environmental efficiency of the EU-27 power mix: An evaluation based on MPT. Energy, v. 69, p. 67-81, Mai. 2014.

DELLANO-PAZ, F. et al. Energy planning and modern portfolio theory: A review. Renewable and Sustainable Energy Reviews, v. 77, p. 636-651, 2017.

FIRICAN, George. How data is (and isn't) like oil. 22 abr. 2019. Disponível em: <https://tdwi.org/articles/2019/04/22/data-all-how-data-is-like-oil.aspx>. Acesso em: 12 set. 2020.

LIOUDIS, N. Understanding the sharpe ratio. 21 jun. 2019. Disponível em: https://www.investopedia.com/articles/07/sharpe_ratio.asp. Acesso em: 4 set. 2020.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, Mar. 1952.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. Management Science, v. 9, n. 2, p. 277-293, Jan. 1963.

WHANG, Steven E. Data analytics: integration and privacy. Dissertação (Doutorado em Filosofia) - Stanford University, Computer Science Department, 2012.